Integration $\sin^2$:

$\int \sin^2(x)\,dx =$ mit partieller Integration $u = \sin \quad v' = \sin$

$u' = \cos \quad v = -\cos$

$$= \int u \cdot v' \, dx$$

$$= [u \cdot v] - \int u' \cdot v \, dx$$

$$= [-\sin(x)\cos(x)] + \int \underbrace{\cos^2(x)}_{1-\sin^2(x)} dx$$

[Additionstheorem: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$]

$$= [-\sin(x)\cos(x)] + [X] - \int \sin^2(x)\,dx$$

$$= [-\sin(x)\cos(x) + x] - \int \sin^2(x)\,dx$$

Auf beiden Seiten $+ \int \sin^2(x)\,dx$: [Auf beiden Seiten steht die gleiche Unbekannte!]

$$\Rightarrow \int \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[X - \sin(x)\cos(x)\right]$$

["Durch 2" auf beiden Seiten]

Komplett analog für $\cos^2$:

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[X + \sin(x)\cos(x)\right]$$

Für spezielle Grenzen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\pi - 0 + \pi - 0\right)$$

$$= \underline{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \underline{\pi}$$

Da $\cos^2$ und $\sin^2$ 2π-periodisch sind gilt sogar:

$$\int_{a}^{a+2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$$

$$\int_{a}^{a+2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$

für jedes beliebige $a \in \mathbb{R}$.