Zusatz zur Aufgabe 6.3

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl λ und $x \in \mathrm{Kern}(T - \lambda)$ die Gleichung

$$f(T)x = f(\lambda)x$$

für alle Borel-messbaren beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie den messbaren Funktionalkalkül und Lemma VII.1.5 in „Werner Funktionalanalysis“.

Lösungsvorschlag

Bezeichne mit $\mathcal{M}^\infty(\sigma(T))$ den Banachraum der beschränkten Borel-messbaren Funktionen auf $\sigma(T)$ ausgestattet mit der Supremumsnorm. Im Weiteren setzen wir diese Funktionen, wenn formal notwendig, stillschweigend durch 0 auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Gegeben seien nun folgende zwei Dinge:

Satz 1 (Messbarer Funktionalkalkül)**.** *Es sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und $\sigma(T)$ sein Spektrum. Dann gibt es genau eine Abbildung $\Phi : \mathcal{M}^\infty(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, für die gilt:*

(a) $\Phi(id) = A$, $\Phi(\mathbf{1}) = I$,

(b) Φ *ist involutiver Algebrenhomomorphismus, d. h.*
- Φ *ist linear:* $\Phi(f + ag) = \Phi(f) + a\Phi(g)$
- Φ *ist multiplikativ:* $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$
- Φ *ist involutiv* $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$

für $f, g \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(A))$ *und* $a \in \mathbb{C}$,

(c) Φ *ist stetig,*

(d) Für $(f_n) \subseteq \mathcal{M}^\infty(\sigma(T))$ *gleichmäßig beschränkt mit punktweisen Grenzwert* $f \in \mathcal{M}^\infty(\sigma(T))$ *gilt*

$$\langle y, \Phi(f_n)x\rangle \to \langle y, \Phi(f)x\rangle \tag{1}$$

für alle $x, y \in \mathfrak{H}$.

Man schreibt gewöhnlich $f(T)$ für den Operator $\Phi(T)$.

Lemma 2 (Werner Lemma VII.1.5 (b))**.** *Es sei U eine Teilmenge von $\mathcal{M}^\infty(\sigma(T))$ mit der Eigenschaft:*

$$(f_n) \subset U,\ \sup_n \|f_n\|_\infty < \infty,\ f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) \text{ existiert für alle } t \implies f \in U\ .$$

Wenn nun alle stetigen Funktionen in U liegen, so gilt $U = \mathcal{M}^\infty(\sigma(T))$.

Nun können wir die obige Aussage beweisen: Wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathrm{Kern}(T - \lambda)$. Dann gilt $Tx = \lambda x$ und somit $p(T)x = p(\lambda)x$ für alle Polynome p. Mit Weißerstraß-Approximation erhalten wir also

$$f(T)x = f(\lambda)x \tag{2}$$

für alle stetigen Funktionen f.

Es sei nun U die Mengen aller beschränkten messbaren Funktionen, die (2) erfüllen. Existiert für eine gleichmäßig beschränkte Folge $(f_n) \subset U$ nun der punktweise Grenzwert f, dann gilt für alle $y \in \mathcal{H}$:

$$|\langle y, (f(T) - f(\lambda))x\rangle| \leq |\langle y, (f(T) - f_n(T))x\rangle| + |f_n(\lambda) - f(\lambda)| \langle y, x\rangle \, .$$

Der erste Summand konvergiert nach Gleichung (1) und der zweite nach der punktweisen Konvergenz gegen 0. Demnach gilt

$$\langle y, (f(T) - f(\lambda))x\rangle = 0$$

für alle $y \in \mathcal{H}$ und somit auch $f \in U$. Mit dem Lemma folgt nun $U = \mathcal{M}^\infty(\sigma(T))$ und damit die Behauptung.