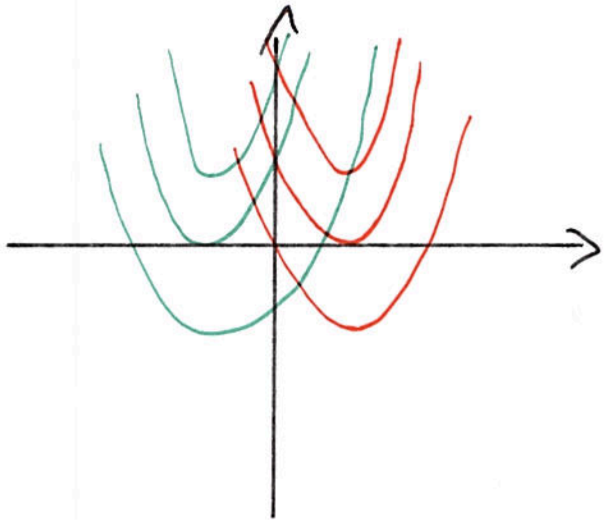
Zg:

$$w(u,v) := \begin{pmatrix} u+v \\ (u+v)^2 + 2(u-v) \end{pmatrix} \begin{matrix} =: x \\ =: y \end{matrix}$$

(a)



v konstant

u konstant

(b) Jacobimatrix von w:

$$J_w(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2(u+v)+2 & 2(u+v)-2 \end{pmatrix}$$

$$\det J_w(u,v) = -4 \neq 0 \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ lokal invertierbar

w ist sogar global invertierbar, denn

(*) $w^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2x - x^2 + y) \\ \frac{1}{2}(x^2 + 2x - y) \end{pmatrix}$ ist Umkehrfunktion.

(c) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} :=$ Jacobimatrix von w^{-1} $\hat{=}$ [Jacobimatrix von w]$^{-1}$

$$\left(J_w(u,v)\right)^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(u+v)-2 & -1 \\ -2(u+v)-2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(u,v) \mapsto f(u,v)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2_{(u,v)} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "w"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2_{(x,y)} \arrow[ur, bend right, "\tilde{f} = f \circ w"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto f(u(x,y), v(x,y))$

<u>Kettenregel:</u>

$$J_{\tilde{f}}(x,y) = J_f(w^{-1}(x,y)) \cdot J_{w^{-1}}(x,y)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2(u+v)-2 & -1 \\ -2(u+v)-2 & 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \Big(\underbrace{f_u \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2} - \frac{v}{4}\right) + f_v \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{2} + \frac{v}{4}\right)}_{\tilde{f}_x}, \underbrace{\frac{1}{4} f_u - \frac{1}{4} f_v}_{\tilde{f}_y} \Big)$$

Natürlich müssen u, v noch durch

$$u = \frac{1}{2}(2x - x^2 + y), \quad v = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - y) \qquad \text{s. } (*)$$

ersetzt werden, damit alles nur noch von den neuen Koordinaten x, y abhängt!