Aufgabe Z8

Ableitung der Umkehrfunktion von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Satz: (Umkehrregel)

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann existieren offene Umgebungen U bzw. V von x_0 bzw. $f(x_0)$ derart, dass

$$g: U \to V \quad \text{mit} \quad g(x) := f(x)$$

bijektiv ist. [g entspricht also f, nur mit neuem Definitionsbereich]

In diesem Fall ist auch $g^{-1}: V \to U$ stetig differenzierbar mit folgender Ableitung:

$$\boxed{(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} \qquad \text{für } y \in V.}$$

Beweis: Da f' stetig ist, gibt es eine ganze Umgebung U von x_0 derart, dass $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann ist $f|_U$ aber injektiv und auf geeignetem V im Wertebereich sogar bijektiv. Bezeichne $g: U \to V$ als Einschränkung von f. Aus der Kettenregel folgt nun

$$g(g^{-1}(y)) = y \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{d}{dy}\left[g(g^{-1}(y))\right]$$

$$= g'(g^{-1}(y)) \cdot (g^{-1})'(y) \qquad \square$$