Aufgabe 27

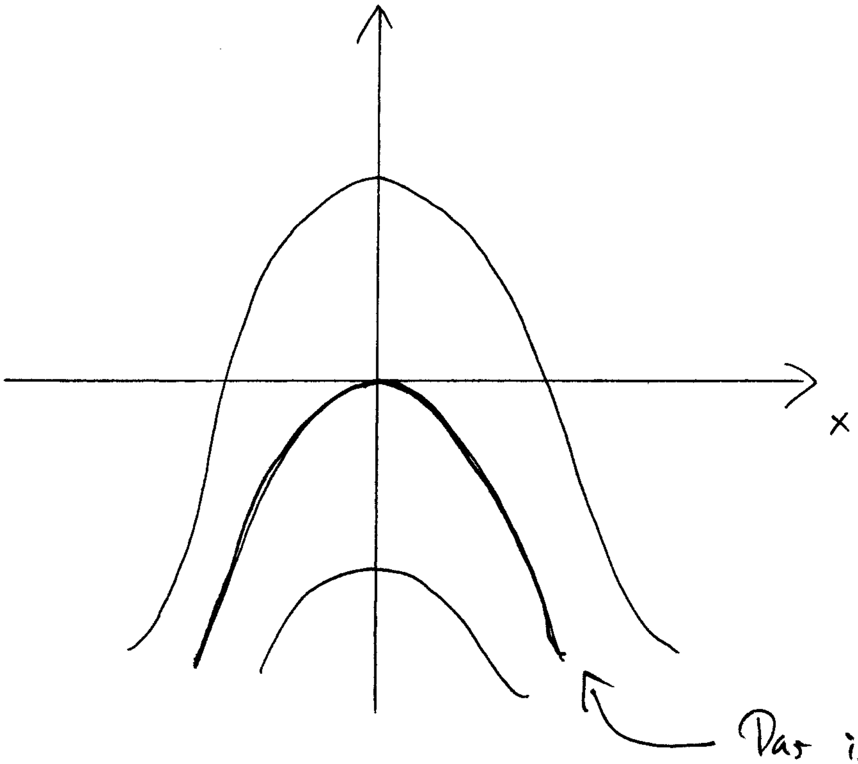
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5x^4 + x^2 + 2y^3 + y$

(a) **Beh:** Die Gleichung $f(x,y) = 0$ ist lokal bei $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ nach y auflösbar, d.h. es existiert eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von x_0 und eine Funktion $g: U \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

[Deswegen schreibt man $y = g(x)$ auf U]

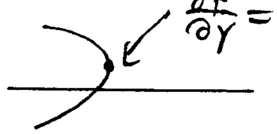
Bew: Die Niveaulinien von f sehen so aus:



Das ist $\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$.

Die Niveaulinie bildet also einen Graphen in der (x,y)-Ebene, wenn x die unabhängige Variable ist.

Die Bedingung $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0}$ ist hinreichend dafür, denn dann kann so etwas nicht vorkommen:



$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

.

Wir rechnen also nach:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0 .$$

$\Rightarrow \exists\, U, g$ wie behauptet. $\square$

(b) <u>Taylorpolynom von g vom Grad 2:</u>

Wir benötigen also $g(0)$, $g'(0)$ und $g''(0)$!

$g(0) = y_0 = \underline{0}$ (vgl. Niveaulinie!)

$g'(0) = 0$ nach Skizze!

<u>Rechnung:</u> Da $f(x, g(x)) = 0$ um $x_0 = 0$ gilt können wir ableiten und erhalten:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = - \frac{\partial f / \partial x \,(x, g(x))}{\partial f / \partial y \,(x, g(x))}$$

$$\Rightarrow \quad g'(0) = - \frac{0}{1} = \underline{0}$$

<u>Zweite Ableitung:</u> (1) nochmal nach x ableiten:

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \cdot g'(x) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g''(x) + \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \cdot g'(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(g'(x)\right)^2$$

Dies nach $g''(x)$ umformen ergibt:

$$g''(x) = -\frac{1}{f_y} \cdot \left[f_{xx} + 2 f_{xy} \cdot g' + f_{yy} \cdot (g')^2 \right],$$

wobei das einzusetzende Argument für eine kurze Formel weggelassen wurde.

$$g''(0) = -\frac{1}{1} \cdot [2 + 0 + 0] = \underline{-2}$$

Das Taylorpolynom ist also einfach $\underline{T_{2,g}(x) = -x^2}$.

[Vergleiche Niveaulinie!].

(c) Besitzt g ein lokales Extremum für $x_0 = 0$?

Aufgrund des Taylorpolynom ist $x=0$ ein <u>lokales Maximum</u> für g.