Aufgabe Z5

$K: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $K(\vec{x}) = \underbrace{\frac{c}{\|\vec{x}\|^3}}_{=:\varphi(\vec{x})} \cdot \vec{x}$ für $\vec{x} \neq 0$.

Berechne die Jacobimatrix!

Lösung:

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varphi(\vec{x}) \cdot x_i\right)$$ (normale eindimensionale Produktregel)

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\vec{x}) \cdot x_i + \varphi(\vec{x}) \cdot \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}}$$

Insgesamt also:

$$J_K(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{pmatrix} + \varphi(x) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

Es bleibt $\nabla\varphi(\vec{x})$ zu berechnen:

$$\nabla\varphi(\vec{x}) = \nabla\left(\frac{c}{\|\vec{x}\|^3}\right) = -\frac{3c}{\|\vec{x}\|^4} \cdot \nabla\|\vec{x}\|$$ nach Kettenregel

$$= -\frac{3c}{\|\vec{x}\|^4} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = -\frac{3c}{\|\vec{x}\|^5} \cdot \vec{x}$$, da $\frac{\partial}{\partial x_1}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|}$

Dies kann oben eingesetzt werden und man erhält:

$$J_K(\vec{x}) = -\frac{C}{\|\vec{x}\|^5} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3x_1x_1 & 3x_1x_2 & 3x_1x_3 \\ 3x_2x_1 & 3x_2x_2 & 3x_2x_3 \\ 3x_3x_1 & 3x_3x_2 & 3x_3x_3 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. - \|\vec{x}\|^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

oder kurz: $J_K(\vec{x}) = -\frac{C}{\|\vec{x}\|^5} \cdot \left[3\vec{x}\vec{x}^T - (\vec{x}^T\vec{x}) \cdot E \right]$

Dies Spur der Jacobimatrix ist die Summe der Diagonal-elemente und somit:

$$\mathrm{Spur}\, J_K(\vec{x}) = -\frac{C}{\|\vec{x}\|^5} \cdot \left(3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3\|x\|^2 \right) = \underline{0}$$