

Aufgabe Z4

Von der Matrix A ist bekannt, dass sie nur reelle Einträge besitzt und deswegen ist das charakteristische Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$$

ein reelles Polynom. Jedes Polynom kann in Linearfaktoren zerlegt werden

$$p_A(\lambda) = k(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)(\lambda - z_3)(\lambda - z_4)(\lambda - z_5) ,$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ und $z_i \in \mathbb{C}$ für $i = 1, \dots, 5$. Nun erkennt man sofort, dass, wenn eine echt komplexe Nullstelle z von p_A existiert, auch die komplex konjugierte Zahl \bar{z} eine Nullstelle ist, denn sonst wäre das Polynom nicht reell.

Laut Aufgabenstellung kennen wir die Nullstellen $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 1 - i$. Demnach sind $z_3 = 1 - i$ und $z_4 = 1 + i$ zwei weitere Nullstellen und nur die letzte Nullstelle z_5 ist noch unbekannt. Da das Polynom ungerade ist, muss diese Nullstelle eine reelle sein und diejenige ist gegeben durch die Information über die Spur der Matrix A .

Die Spur einer Matrix ist die Summe der Diagonalelemente und invariant unter Ähnlichkeitstransformationen. Aus diesem Grund ist die Spur als die Summe der Eigenwerte, mit Vielfachheiten gezählt, gegeben. Demnach folgt aus

$$5 = \text{Spur}(A) = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 1 + 1 + 1 + 1 + z_5 ,$$

dass $z_5 = 1$ gilt.