Z27

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

EW $\lambda_1 = 0$

$\lambda_{2,3,4} = -1$

Löse $A\vec{y} = \dot{\vec{y}}$

Eigenvektoren (Hauptvektoren) bestimmen

$\lambda_1 = 0$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1(t) = e^{0 \cdot t} \vec{v}_1$ eine Lösung

$\lambda = -1$ (3 Vektoren benötig!)

$$(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

$$\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Zeilenumformungen verändern den Kern nicht!)

III + I , IV − I

$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor von A

ein dimensional

$$\Rightarrow \quad y_2(t) = e^{-1\cdot t}\cdot \vec{v}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist}$$

eine Lösung.

Woher bekommen wir die restlichen Lösungen?

Durch die Hauptvektoren!

$$\mathrm{Kern}\left((A - \lambda \mathbb{1})^2 \right) = \mathrm{Kern}\left(B^2\right)$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\uparrow\, \vec{v}_2} \oplus \mathbb{R}\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=:\, \vec{v}_3}$$

Hauptvektor!
(2. Stufe!)

Wir brauchen aber noch einen 3. Vektor!

Hauptvektoren 3. Stufe:

$$\mathrm{Kern}\left((A-\lambda \mathbb{1})^3\right) = \mathrm{Kern}\left(B^3\right)$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \oplus \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} \oplus \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\,\vec{v}_4}$$

(Hauptvektor

$\vec{v}_4$ ist Hauptvektor 3. Stufe, denn $\vec{v}_4 \notin \mathrm{Kern}\left((A-\lambda\mathbb{1})^2\right)$

Nun setzen wir schrittweise unsere gewünschten Vektoren:

$$\vec{w}_4 := \vec{v}_4 \quad , \quad \vec{w}_3 := (A-\lambda\mathbb{1})\,\vec{w}_4 = B\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 := B\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

Alle vier Lösungen sind nun:

$$\gamma_1(t) = e^{a \cdot t} \vec{V}_1$$

$$\gamma_2(t) = e^{-t} \cdot \vec{w}_2$$

$$\gamma_3(t) = e^{-t} \cdot \vec{w}_3 + e^{-t} \cdot t \cdot \vec{w}_2$$

$$\gamma_4(t) = e^{-t} \cdot \vec{w}_4 + e^{-t} \cdot t \, \vec{w}_3 + e^{-t} \cdot \frac{1}{2} t^2 \cdot \vec{w}_2$$

Allgemeine reelle Lösung:

$$\gamma(t) = c_1 \gamma_1(t) + c_2 \gamma_2(t) + c_3 \gamma_3(t) + c_4 \gamma_4(t) \, , \quad c_i \in \mathbb{R}$$