Z25

AWP: $y'' = y \cdot y' + e^x$ (*)

$y(0) = y'(0) = 1$

Das ist eine DGL von zweiter Ordnung, so dass zwei Anfangsbedingung notwendig sind. Es ist keine lineare DGL.

Anstatt die DGL zu lösen, könnte man auch Näherungen des AWP untersuchen. Möglicherweise ist das einfache oder die einzige Möglichkeit.

Das Taylorpolynom benötigt die Koeffizienten $y(0), y'(0), y''(0), \dots$
Die vierte Ordnung braucht also:

$$\underbrace{y(0)}_{=1},\ \underbrace{y'(0)}_{=1},\ y''(0),\ y'''(0),\ y^{(4)}(0)$$

$$y''(0) \overset{(*)}{=} y(0)\,y'(0) + e^0 = \underline{2}$$

$$y'''(0) = \frac{d}{dx}\left[y''\right]_{|x=0} \overset{(*)}{=} \frac{d}{dx}\left[y \cdot y' + e^x\right]_{|x=0}$$

$$= \left[y'(x) \cdot y'(x) + y''(x) \cdot y(x) + e^x\right]_{|x=0} \qquad (**)$$

$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = \underline{4}$$

$$y^{(4)}(0) = \frac{d}{dx}\left[y'''\right]_{|x=0}$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{d}{dx}\left[y'\cdot y' + y''\cdot y + e^x\right]_{|x=0}$$

$$= \left[y''\cdot y' + y''\cdot y' + y'''\cdot y + y''\cdot y' + e^x\right]_{|x=0}$$

$$= 2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1$$

$$= \underline{11}$$

D.h. die Lösung des AWP hat das Taylorpolynom

$$\underline{T_4(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{24}x^4}$$

Wir können das System 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung umwandeln, indem wir setzen:

$$y_1 := y$$
$$y_2 := y'$$

D.h. $y_2' = y''$, $y_1 \cdot y_2 = y \cdot y'$ und das AWP lautet:

$$\underline{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 y_2 + e^x \end{pmatrix}}, \quad \underline{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$