Z20

$$y'(x) = y(x) - 3x\, y^4(x) \qquad \text{lösen!}$$

Lösung: In der Differentialgleichung tritt y' und y in Potenz 1 auf und ansonsten <u>nur</u> noch y^r (mit $r=4$). Dies ist deswegen eine Bernoullische DGL, die mit der Substitution

$$z = y^{1-r} \quad \text{zu lösen ist.}$$

$$z(x) = \frac{1}{y^3(x)}, \quad z'(x) = -\frac{3}{y^4(x)} \cdot y'(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{3} y^4(x) \cdot z'(x)$$

Eingesetzt:

$$-\frac{1}{3} y^4(x) \cdot z'(x) = y(x) - 3x\, y^4(x) \qquad | : y^4(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{3} z'(x) = \underbrace{y^{-3}(x)}_{z(x)} - 3x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z'(x) = -3z(x) + 9x} \qquad \text{lineare DGL!} \qquad (*)$$

Bemerkung: Durch Division mit y haben wir möglicherweise die triviale Lösung "verloren". $y \equiv 0$ löst die DGL aber offensichtlich.

Lösung von (*) mit integrierendem Faktor:

$$z'(x) + 3z(x) = 9x \qquad | \cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad z'(x)\cdot e^{3x} + 3z(x)e^{3x} = 9x\cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{3x} z(x)\right) = 9x\cdot e^{3x}$$

$$\Rightarrow \quad e^{3x} z(x) = \int 9x e^{3x}\,dx + C_1 \qquad , C_1 \in \mathbb{R}$$

(partielle Integration)

$$\Rightarrow \quad e^{3x} z(x) = (3x-1)e^{3x} + C_1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{z(x) = 3x - 1 + C_1 e^{-3x} \qquad , C_1 \in \mathbb{R}}$$

Somit sind die Lösungen der ursprünglichen DGL gegeben durch:

$$y(x) = \left(\frac{1}{z(x)}\right)^{1/3} = \underline{\frac{1}{\sqrt[3]{3x-1+C_1 e^{-3x}}}} \qquad , C_1 \in \mathbb{R}$$

und $\underline{y(x) = 0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.