Z1

Allgemeine Taylorformel für Taylor-Polynom 2. Grades:

$$T_f(x_0+h_x, y_0+h_y) = f(x_0,y_0) + h_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + h_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$
$$+ \frac{1}{2} h_x^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \frac{1}{2} h_y^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$
$$+ h_x \cdot h_y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$$

Für $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (zweimal stetig differenzierbar) erlaubt der Satz von Hermann Amandus Schwarz das Vertauschen der zweiten partiellen Ableitungen, d.h

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Hier $f(x,y) = \sin(x+2y)$, $\vec{x}_0 = (x_0,y_0)^T$, gilt:

$$T_f(x_0+h_x, y_0+h_y) = \sin(x_0+2y_0) + h_x \cos(x_0+2y_0) + 2 \cdot h_y \cos(x_0+2y_0)$$
$$+ \frac{1}{2} h_x^2 \left(-\sin(x_0+2y_0)\right) + \frac{1}{2} h_y^2 \cdot \left(-4\sin(x_0+2y_0)\right)$$
$$+ h_x \cdot h_y \cdot \left(-2\sin(x_0+2y_0)\right)$$

$$= \sin(x_0+2y_0) + (h_x+2y)\cos(x_0+2y_0) - \frac{1}{2}\left(h_x^2 + 4h_xh_y + 4h_y^2\right).$$