Banach'scher Fixpunktsatz

Es sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum.

[z.B $M = \mathbb{R}$ und $d = |\cdot|$ der Betrag]

Ist $f: M \Rightarrow M$ eine Kontraktion, d.h es existiert ein $L < 1$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in M,$$

so besitzt f genau eine Fixpunkt, d.h. einen Punkt $a \in M$ mit $f(a) = a$.

Es gilt weiterhin für alle $x_0 \in M$:

$$d(x_n, a) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$x_n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}(x_0)$$

$$x_1 = f(x_0)$$

$$d(x_n, a) \leq \frac{L}{1-L} d(x_{n-1}, x_n) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$x_{n-1} := f^{n-1}(x_0)$$

$$x_n := f^{n}(x_0) \text{ (s.o.)}$$

Bemerkung: Wenn M eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, und $f: M \to M$ differenzierbar im Inneren von M ist, so kann $L := \sup_{x \in M} |f'(x)|$ gewählt werden.

Dies gilt aufgrund des Mittelwertsatzes

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x - y| \qquad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ u. } y.$$