A41

Aufgabe: Finde die allgemeine reelle Lösung von

$$\dot{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \vec{x}$$

Lösung:

(1) Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 + 9 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = 2 \pm 3i$$

Eigenvektoren:

$$A \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (2+3i) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = (2-3i) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Allgemeine komplexe Lösung:

$$\vec{x}_{\mathbb{C}}(t) = e^{2t} \cdot \left[A e^{i3t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + B e^{-i3t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad , A, B \in \mathbb{C}$$

(3) Allgemeine reelle Lösung:

$$\vec{x}(t) = \text{"} \operatorname{Re} x_{\mathbb{C}} + \operatorname{Im} x_{\mathbb{C}} \text{"} \quad \text{als Merkregel.}$$

Nimm entweder $e^{i3t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $e^{-i3t}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ aus der komplexen Lösung und berechne Real- und Imaginärteil. Beides sind dann reelle Lösungen, so dass wir die allgemeine aufschreiben können.

$$\operatorname{Re}\left(e^{i3t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} i\cos(3t) - \sin(3t) \\ \cos(3t) + i\sin(3t) \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix}}$$

$$\operatorname{Im}\left(e^{i3t}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \underline{\begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}}$$

Allgemeine reelle Lösung:

$$\underline{\vec{x}(t) = e^{2t}\left[c_1 \cdot \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}\right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$