# Blatt 2 A4

Extrema bestimmen

(a) $f(x,y) = xy(2-x-y) = 2xy - x^2y - xy^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y - 2xy - y^2 \\ 2x - x^2 - 2xy \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\mathrm{I} \quad y(2-2x-y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y=0 \vee y = 2(1-x)$$
$$\mathrm{II} \quad x(2-x-2y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \vee y = \tfrac{1}{2}(2-x)$$

Kritische Punkte: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,2)$, $P_3 = (2,0)$
$P_4 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

Hessematrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 2-2x-2y \\ 2-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

Bei $2\times2$-Matrizen kann die Determinante helfen, denn
$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = ad - b^2 = EW1 \times EW2 < 0 \Leftrightarrow EW>0 \wedge EW<0$.

$$\det H_f(x,y) = 4xy - (2-2x-2y)^2$$

Kritische Punkte ergeben:

$\det H_f(P_1) = -4$, $\det H_f(P_2) = -4$, $\det H_f(P_3) = -4$

$\Rightarrow$ Alle drei sind Sattelpunkte.

Für $P_4$ ergibt sich:

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{Eigenwerte } -3,-1 \quad \binom{1}{1}, \binom{1}{-1}}$$

Oder man macht das Hauptminorenverfahren.

Demnach ist $P_4$ ein Maximum.