A33 $\varepsilon > 0$, DGL $y' = -4x\sqrt{|y|}\,\mathrm{sign}(y)$

$$= -4x \begin{cases} \sqrt{y} & , y > 0 \\ -\sqrt{-y} & , y < 0 \end{cases}$$

(a) AW $\neq 0$ (Anfangswert) $\Rightarrow$ Separation möglich: $\dfrac{dy}{-4\sqrt{|y|}\,\mathrm{sign}(y)} = x\,dx$

1. Fall AW $= \varepsilon^2$

$$\int \frac{dy}{-4\sqrt{y}} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C} \quad , \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow y = (-x^2 + C)^2 \quad , (C := -2\tilde{C}) , \quad C \in \mathbb{R}$$

Da $y(0) = \varepsilon^2 \Rightarrow y(x) = (-x^2 + \varepsilon)^2$ für $x \in [0, \varepsilon]$

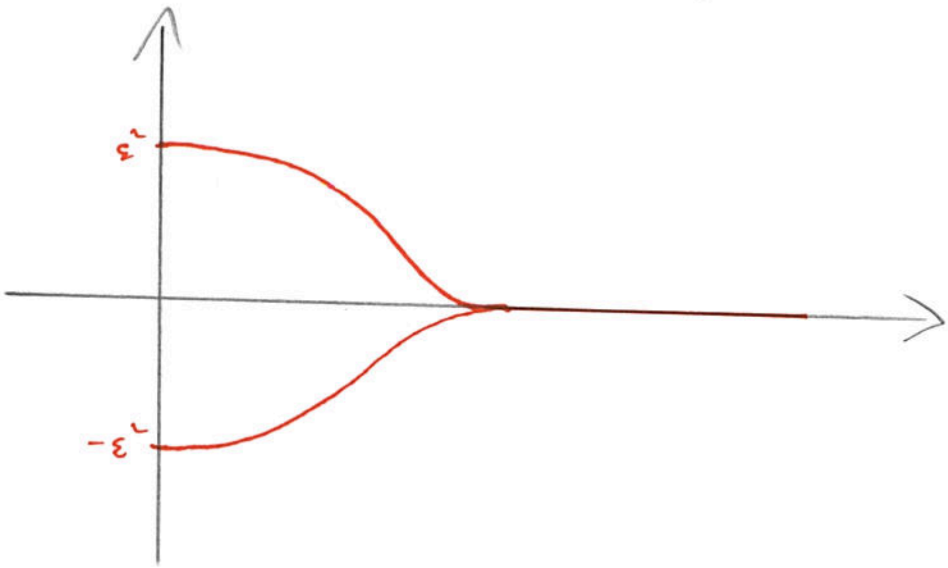
[Sobald $y(\varepsilon) = 0$ erreicht ist, ist die Nulllösung offensichtlich eine Lösung der DGL]

2. Fall AW $= -\varepsilon^2$

$$\int \frac{dy}{4\sqrt{-y}} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow y(x) = -(-x^2 + C)^2 \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Da $y(0) = -\varepsilon^2 \Rightarrow y(x) = -(-x^2 + \varepsilon)^2$ für $x \in [0, \varepsilon]$



(b) Ist die Lösung zum AW $y(0) = 0$ eindeutig?

$y \equiv 0$ ist mit Sicherheit eine Lösung der DGL mit AW $y(0) = 0$.

Es gilt nun
$$y'(x) = \begin{cases} < 0 & , y(x) > 0 \\ > 0 & , y(x) < 0 \end{cases}$$

laut der DGL.

Anders formuliert: Die Funktion muss über der x-Achse immer eine fallende Funktion und unter der x-Achse eine wachsende sein.

$\Rightarrow$ Ist die Funktion irgendwann 0, dann für alle x Werte danach auch, denn sie "kommt von der Null nicht mehr weg".