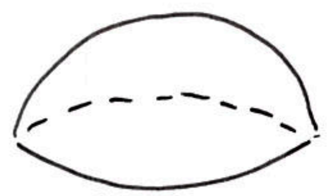
A27

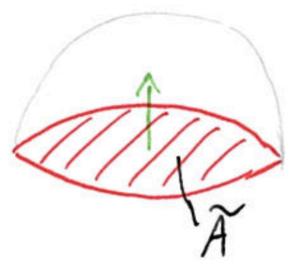
$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{2} z^2 \\ x \end{pmatrix}, \quad A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 3 \right\}$$

A =  Fläche von Kugelkappe

∂A untere Kreis

$$I = \int_A \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot d^2\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \quad \text{(nach Stokes)}$$

$$= \int_{\tilde{A}} \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot d^2\vec{A} \quad \text{(nach Stokes)}$$



ebene Fläche

$$= \int_{\tilde{A}} \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot \vec{n}\, d^2A$$

normierter Normalenvektor

Der Satz von Stokes erlaubt also anstatt die gekrümmte Kugelkappe einfach den ebenen Kreis $\tilde{A}$ zu integrieren.

$$\operatorname{rot}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{x}{2} z^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - xz \\ 0 - 1 \\ \frac{1}{2} z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xz \\ -1 \\ \frac{1}{2} z^2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn die Fläche ist eben und parallel zur x-y-Ebene.

Demnach:

$$I = \int_{\tilde{A}} \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot \vec{n} \, d^2A = \int_{\tilde{A}} \underbrace{\frac{1}{2} z^2}_{z=\sqrt{3} \text{ auf } \tilde{A}} \, d^2A$$

$$= \frac{3}{2} \int_{\tilde{A}} d^2A = \frac{3}{2} \underbrace{\operatorname{vol}_2(\tilde{A})}_{\text{Flächeninhalt des Kreises.}} = \frac{3}{2} \cdot \pi$$

Zusatzbemerkung: Der Kreis $\tilde{A}$ hat Radius 1, denn: