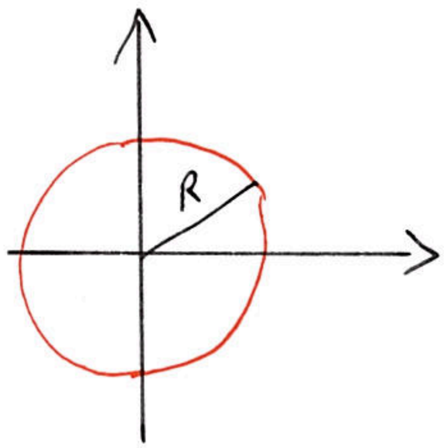
A24 Satz von Gauß:

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{w})\, d^3V = \oint_{\partial V} \vec{w} \cdot d^2\vec{A}$$

Nun ist $\vec{w}(x,y,z) = \vec{x} \cdot \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

und V die Kugel mit Radius R.



Die linke Seite:

Die Divergenz:

$$\operatorname{div}(\vec{w}) = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \quad , \left(\sqrt{\cdots} := \sqrt{x^2+y^2+z^2} \right)$$

$$= \left(\sqrt{\cdots} + \frac{x^2}{\sqrt{\cdots}} \right) + \left(\sqrt{\cdots} + \frac{y^2}{\sqrt{\cdots}} \right) + \left(\sqrt{\cdots} + \frac{z^2}{\sqrt{\cdots}} \right)$$

$$= 3\sqrt{\cdots} + \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{\cdots}} = 4 \cdot \sqrt{\cdots} = \underline{4 \cdot \|\vec{x}\|}$$

Das Volumenintegral

Verwende Kugelkoordinaten $\Phi(r,\varphi,\theta) = r \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{w})\, d^3V = \int_{V=\Phi(A)} 4\cdot\|\vec{x}\|\, d(x,y,z)$$

$$= \int_A 4\cdot r\cdot \underbrace{|\det J_\Phi(r,\varphi,\theta)|}_{\parallel\ (\text{nachrechnen!})}\, d(r,\varphi,\theta) \qquad A := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{array}{l} r\in[0,R] \\ \varphi\in[0,2\pi] \\ \theta\in[0,\pi] \end{array} \right\}$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} 4r\cdot(r^2\sin\theta)\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi\cdot \int_0^R 4r^3 \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \right)}_{2\ (\text{merken!})} dr$$

$$= \underline{4\pi\cdot R^4}$$

Rechte Seite:

$$\oint_{\partial V} \vec{w}\cdot d^2\vec{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{w}(\Phi(\varphi,\theta))\cdot \vec{N}(\varphi,\theta)\, d\varphi\, d\theta \qquad (\text{siehe Übung!})$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \cdot \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cdot\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\vec{x}/R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\vec{x}/R}}_{1} R^2\cdot\sin\theta\, d\varphi\, d\theta = \underline{4\pi R^4}$$