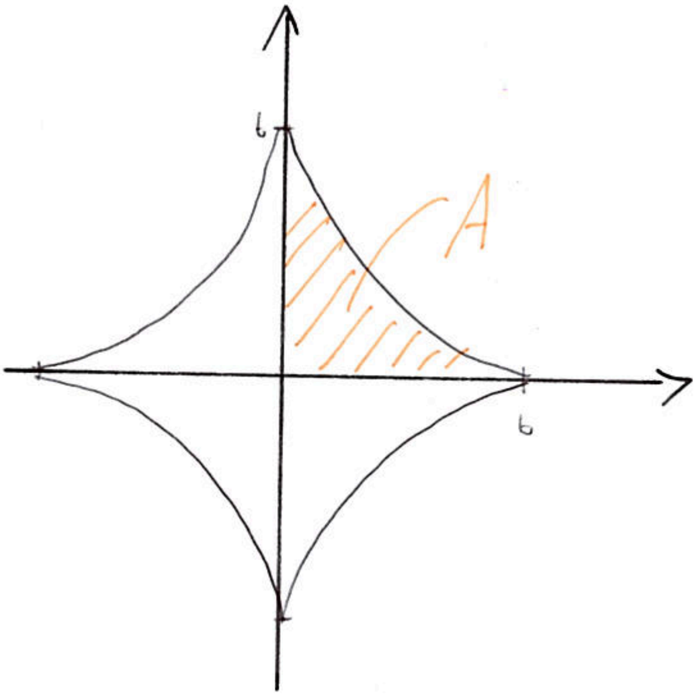
A20

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a =: b^{2/3} > 0 \quad \text{(Astroide / Sternkurve)}$$



Eine Parametrisierung ist $\theta \mapsto \begin{pmatrix} b(\cos\theta)^3 \\ b(\sin\theta)^3 \end{pmatrix}$

Gesucht: Fläche $= 4 \cdot A = 4 \cdot \int_A 1 \cdot d(x,y)$

Neue Koordinaten: $\Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos^3\theta \\ \rho\sin^3\theta \end{pmatrix} = \text{"}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\text{"}$

$$\det\left(J_\Phi(\rho,\theta)\right) = \frac{3\rho}{8}\left(1 - \cos(4\theta)\right)$$

wobei $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ verwendet wurde.

Schreibe nun $B := \{ (\rho,\theta) \mid \rho \in [0,b],\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$

Fläche $= 4 \cdot A = 4 \cdot \int_B |\det J_\Phi(\rho,\theta)| \, d(\rho,\theta) = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^b \frac{3}{8}\rho(1-\cos 4\theta)\, d\rho \right) d\theta$

$$= 4 \cdot \frac{3}{32}\pi a^3 = \frac{3}{8}\pi a^3$$