A. 10.4

$(H, \langle \cdot , \cdot \rangle_H)$ Hilbertraum mit abzählbarem totalen ONS $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(a) Beh: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ konvergiert $\iff (c_k) \in \ell^2_{\mathbb{C}}$

Bew: Betrachte: $(N > M)$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N} c_k e_k - \sum_{k=1}^{M} c_k e_k \Big\|_H^2 = \Big\| \sum_{k=M+1}^{N} c_k e_k \Big\|_H^2 = \Big\langle \sum_{k=M+1}^{N} c_k e_k , \sum_{j=M+1}^{N} c_j e_j \Big\rangle_H$$

$$\overset{\text{Linear}}{=} \sum_{k,j=M+1}^{N} \overline{c_k} \cdot c_j \langle e_k , e_j \rangle \overset{\text{ONS}}{=} \sum_{k=M+1}^{N} |c_k|^2$$

D.h. $\left(\sum_{k=1}^{N} c_k e_k \right)_N$ Cauchyfolge genau dann, wenn $\left(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \right)_N$ C.F. ist.

Mit der Vollständigkeit folgt also: $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ konv. $\iff (c_k) \in \ell^2_{\mathbb{C}}$.

(b) Beh: F ist linear und bijektiv

Bew: Linear: $F((c_k) + (d_k)) \overset{(*)}{=} \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{N} c_k e_k + \sum_{k=1}^{N} d_k e_k \right]$ (*) vgl. Teil (a)

$$= \lim_{N \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{N} (c_k + d_k) e_k \right] = F((c_k + d_k))$$

$F(\lambda \cdot (c_k)) = \lambda \cdot F((c_k))$ (klar)

Bijektiv: - Es gilt $\operatorname{Kern} F = \{0\}$, da (e_k) ONS ist und somit zwangsläufig linear unabhängig.

- Es gilt $\operatorname{Bild}(F) = H$, da (e_k) total ist.

(c) $F^{-1}(x) = (\langle e_1, x \rangle, \langle e_2, x \rangle, \dots)$ für $x \in H$.

Zeige $F(F^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in H$ und $F^{-1}(F((c_k))) \quad \forall (c_k) \in \ell^2_{\mathbb{C}}$!

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(x)) = \mathcal{F}((\langle e_1, x\rangle, \langle e_2, x\rangle, \dots)) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x\rangle e_k \underset{\substack{\text{totales ONS} \\ \text{(Parseval)}}}{=} x$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}((c_k))) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k\right) = \left(\langle e_1, \sum c_k e_k\rangle, \langle e_2, \sum c_k e_k\rangle, \dots\right)$$

$$= (c_1, c_2, \dots) = (c_k).$$

⌜ Beachte: Skalarprodukt ist stetig in beiden Komponenten. Ein Grenzwert darf also heraus gezogen werden. ⌟ (**)

<u>(d)</u> <u>Beh:</u> $\mathcal{F}$ ist Isometrie

<u>Bew:</u> $\mathcal{F}$ ist bijektiv und erfüllt:

$$\underline{\langle \mathcal{F}((c_k)), \mathcal{F}((d_k))\rangle_H} = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \sum_{l=1}^{\infty} d_l e_l \right\rangle_H$$

$$\underset{\text{Linear}}{\overset{(**)}{=}} \sum_{k,l=1}^{\infty} \overline{c_k} d_k \langle e_k, e_l\rangle \overset{\text{ONS}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k} d_k = \underline{\langle (c_k), (d_k)\rangle_{\ell^2_{\mathbb{C}}}}.$$

$\Rightarrow$ Isometrie $\square$