A. 8. 2

(a) Beh: $(f_k(y))_k$ f.ü. monoton wachsend, $\lim_{k\to\infty} f_k(y) = (1+y^4)^{-1}$

Bew: Offensichtlich: $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \underbrace{e^{-y^2x}}_{>0} \underbrace{\sin(x)}_{>0} dx > 0.$

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-y^2x} \sin(x)\, dx = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-y^2x} \sin(x) dx + \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi} e^{-y^2x} \sin(x)\, dx$$

$$= \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-y^2x} \sin(x)\, dx + \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-y^2u} e^{-y^2\pi} \sin(u+\pi)\, du$$

$$= \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-y^2x} \sin(x)\, dx - \underbrace{e^{-y^2\pi}}_{\leq 1} \cdot \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} e^{-y^2u} \sin(u)\, du \geq 0 \quad \forall k$$

$\Rightarrow (f_k(y))_k$ monoton wachsend.

$$\int_0^{2\pi k} e^{-y^2x} \sin(x)\, dx = \frac{1}{2i}\left[\int_0^{2\pi k} \left(e^{x\cdot(i-y^2)} - e^{x(-i-y^2)}\right) dx\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-y^2}\left(e^{2\pi k(i-y^2)} - 1\right) + \frac{1}{i+y^2}\left(e^{-2\pi k(i+y^2)} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{i-y^2}\left(e^{-2\pi k y^2} - 1\right) + \frac{1}{i+y^2}\left(e^{-2\pi k y^2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-2\pi k y^2} - 1\right) \cdot \left[\frac{1}{i-y^2} + \frac{1}{i+y^2}\right]$$

$$= \left(1 - e^{-2\pi k y^2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{i}{i-y^2} + \frac{i}{i+y^2}\right]$$

$$= \left(1 - e^{-2\pi k y^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-1+iy^2-iy^2-1}{-1-y^4}\right]$$

$$= \left(1 - e^{-2\pi k y^2}\right) \cdot (1+y^4)^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} (1+y^4)^{-1}$$

(b) $\displaystyle\int_{[0,a]\times\mathbb{R}} e^{-y^2x}\sin(x)\,d(x,y)$ mit Fubini-Tonelli

(1) $$\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2x}\sin(x)\,dy\,dx = \int_0^a \sin(x)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,dx$$

$$= \sqrt{\pi}\cdot\int_0^a \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^a e^{-y^2x}\sin(x)\,dx\,dy =: \int_{-\infty}^{\infty} f_a(y)\,dy \qquad \text{s. (a)}$$

Nach Teil (a) ist der Satz der monotonen Konvergenz anwendbar und man erhält:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{2\pi k}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^4}\,dy \underset{\text{Residuensatz}}{=} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Insgesamt also:

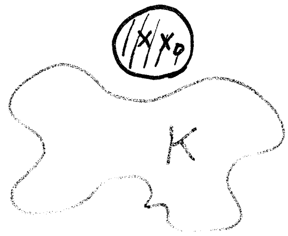
$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t^2)\,dt \underset{\text{Subst.}}{=} \int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \overset{(1),(2)}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

A.8.3 $\quad K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt und $\rho \in \mathcal{L}^1(K)$

(a) Beh: $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ und $\Delta u = 0$

Bew: Wähle $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ fest und $d := \operatorname{dist}(x_0, K)$
$:= \inf\{\|x_0 - y\|_2 \mid y \in K\}$

Anstatt u betrachten wir nun
$V := u|_{B_{\frac{d}{2}}(x_0)}$



Offensichtlich ist $\gamma : \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{\frac{d}{2}}(0)} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \|x\|_2^{-1}$

beschränkt und C^∞.

(1) v bzw. u ist wohl definiert:

Sei $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ beliebig und $f := \operatorname{dist}(x, K)$

$$|u(x)| \leq \int_K |\rho(y)| \cdot \|x-y\|_2^{-1} dy \leq \frac{1}{f} \int_K |\rho(y)| = \frac{1}{f} \|\rho\|_{L^1} < \infty$$

$\Rightarrow$ u existiert auf $\mathbb{R}^3 \setminus K$ und damit auch v auf $B_{\frac{d}{2}}(x_0)$.

(2) Stetigkeit

Es sei $x \in B_{\frac{d}{2}}(x_0)$ und $(x_k) \subseteq B_{\frac{d}{2}}(x_0)$ mit $x_k \to x_0$.

[Da $|v(x_k)| \leq \int_K |\rho(y)| \cdot |\gamma(x_k - y)| \leq \|\gamma\|_\infty \cdot \|\rho\|_{L^1}$, gilt]

$$\lim_{k\to\infty} v(x_k) = \lim_{k\to\infty} \int_K \underbrace{\rho(y) \cdot \gamma(x_k - y)}_{f_k(y)} \overset{\text{Leb.}}{=} \int_K \rho(y) \cdot \gamma(x-y) = v(x),$$

denn Satz von Lebesgue ist anwendbar

$$|f_k(y)| \leq \|\gamma\|_\infty \cdot |\rho(y)| \quad \text{und} \quad |\rho| \in \mathcal{L}^1.$$

(3) Ableitungen

Differentiationssatz anwendbar auf $f(x,y) := \rho(y)\gamma(x-y)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_\nu}(x,y)\right| \leq \left\|\frac{\partial \gamma}{\partial x_\nu}\right\|_\infty \cdot |\rho(y)| =: \Phi(y) \quad , \Phi \in \mathcal{L}^1$$

$$\overset{\text{Diff.satz}}{\Longrightarrow} \quad v \in C^1, \quad \frac{\partial v}{\partial x_\nu}(x) = \int \rho(y) \frac{\partial \gamma}{\partial x_\nu}(x-y)\, dy$$

Analog alle höheren Ableitung (Induktion)

$$\Longrightarrow v \in C^\infty(B_{\frac{d}{2}}(x_0))$$

$$\Longrightarrow \Delta v(x) = \int_K \rho(y) \Delta_x \gamma(x-y)\, dy = 0 \quad , \text{da} \quad \Delta\gamma = 0$$

Da $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ beliebig, folgt $\Delta u(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$

(b)

$$u(x) = \int_K \frac{1}{\|x-y\|_2}\, dy = \int_K \langle x-y, x-y \rangle^{-1/2}\, dy$$

$$= \int_K \left[\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\langle x,y \rangle\right]^{-1/2}$$

$$= \int_K \left[\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \underbrace{\sphericalangle(x,y)}_{=:\theta}\right]^{-1/2}$$

Transformation $\Phi: (r, \varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \leftarrow$ x-Richtung

$$= 2\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{a - b\cos\theta}}\, d\theta\, dr \quad \text{mit} \quad a = \|x\|^2 + r^2, \quad b = 2r\|x\|$$

$$= 2\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot \int_{a-b}^{a+b} \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}}\, d\xi\, dr \quad \text{mit} \quad \xi = a - b\cos\theta$$

$$= 2\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot \frac{1}{b} \cdot 2 \left(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot \frac{1}{\|x\|} \left(\sqrt{(\|x\| + r)^2} - \sqrt{(\|x\| - r)^2} \right)$$

$$= \frac{2\pi}{\|x\|} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot \left((\|x\| + r) - \big| \|x\| - r \big| \right)$$

<u>1. Fall:</u> $\|x\| < R_1$

$$u(x) = \frac{2\pi}{\|x\|} \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot \left(\|x\| + r - r + \|x\| \right)$$

$$= 4\pi \cdot \int_{R_1}^{R_2} r = 4\pi \left(\frac{1}{2} R_2^2 - \frac{1}{2} R_1^2 \right)$$

$$= \underline{2\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)}$$

<u>2. Fall:</u> $\|x\| > R_2$

$$u(x) = \frac{2\pi}{\|x\|} \cdot \int_{R_1}^{R_2} 2 r^2 = \underline{\frac{4}{3} \pi \frac{1}{\|x\|} \cdot \left(R_2^3 - R_1^3 \right)}$$