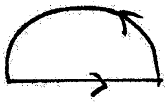
P.8 (a)  $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^4} = \underline{\frac{2\pi}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$$

(b) $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{z^2+\tilde{a}^2}$, fällt schnell genug ab im Unendlichen!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+\tilde{a}^2} = \frac{\pi e^{-\tilde{a}}}{\tilde{a}} \quad \text{mit} \quad \tilde{a} = \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(a+x^2)}\, dx = \underline{\frac{\pi e^{-\sqrt{a}}}{\sqrt{a}}}$$

(c) $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-3\sin(x))^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(5-\frac{3}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(5+\frac{3}{2}i\left(e^{ix}-\frac{1}{e^{ix}}\right)\right)^2}\, dx$$

$$= \oint_{\partial B_1(0)} \frac{1}{\left(5+\frac{3}{2}i\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{iz} \cdot dz = \underline{\frac{5}{32}\pi}$$

P9 (a) $$\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(x+y) \\ \sqrt{3}\,(x-y) \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \Phi' = \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\sqrt{6}\cdot 2 - 2\sqrt{6} = -4\sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ Φ ist ein C^1-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^3$

$$\overset{\text{Trafo}}{\Rightarrow} \int_{\mathbb{R}^3} f(\Phi(x))\, |\det \Phi'(x)|\, dx = \int_{\Phi(\mathbb{R}^3)} f(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

$$\Leftrightarrow +4\sqrt{6} \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-2(x+y)^2 - 3(x-y)^2 - 4z^2\right) d(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\|\tilde{x}\|^2}\, dx$$

$$= \left(\sqrt{\pi}\right)^3$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \ldots = \underline{\frac{1}{4\sqrt{6}} \sqrt{\pi}^3}$$

(b) $$\int_{B_1(0)} \left(x_1^2 + x_2^2 + (x_3-2)^2\right)^{-1/2} dx$$ Kugelkoordinaten wählen

$$= \underline{\frac{2\pi}{3}}$$

P. 10

Berechne das iterierte Integral und Fubini-Tonelli benutzen.

$$\int_A \frac{1}{x^2+y^2} = \int_0^1 \int_0^{x^a} (x^2+y^2)^{-1} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^a} x^{-2} \cdot \left(1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)\right)^{-1} dy \, dx = \int_0^1 x^{-2} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \cdot x\right]_0^{x^a} dx$$

$$= \int_0^1 x^{-1} \arctan(x^{a-1}) \, dx$$

(1) $|x^{-1} \arctan(x^{a-1})| \geq x^{-1} \arctan(1)$ wenn $a \leq 1$

und $\int_\varepsilon^1 x^{-1} dx = -\ln(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} +\infty$.

$\Rightarrow$ Für $a \leq 1$ ist $(x^2+y^2)^{-1}$ nicht über A integrierbar.

(2) $|x^{-1} \arctan(x^{a-1})| \leq x^{-1} \cdot x^{a-1}$ Taylor, wenn $a > 1$

und $\int_0^1 x^{-2+a} dx < \infty$ $\Rightarrow$ Für $a > 1$ ist $(x^2+y^2)^{-1}$ über A integrierbar.

$$\int_A \frac{1}{x^2+y^2} \, d(x,y) = \begin{cases} \infty & , a \leq 1 \\ < \infty & , a > 1 \end{cases}$$

Gebiet um die Null entscheidend!