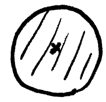
A. 6. 3

(a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$, Ringgebiet $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$= \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2 \cdot z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!} z^n$$

(b) $f(z) = \dfrac{2}{z^2-4z+3} = \dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$

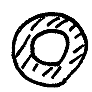


$$= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-3} \qquad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

Laurentreihe auf Ringgebiet $D = B_1(0)^*$. Dort sind beide Anteile holomorph und es gilt $|z| < 1$ und $|\frac{z}{3}| < 1$. Die geometrische Reihe zeigt nun:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \cdot z^n$$

(c) $f(z)$ aus (b) auf Ringgebiet $D = B_3(0) \setminus \overline{B_1(0)}$.

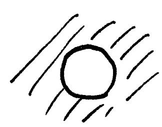


Es gilt nun $|\frac{1}{z}| < 1$ und $|\frac{z}{3}| < 1$. Geometrische Reihen bringt nun:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k$$

(d) $f(z)$ aus (b) auf Ringgebiet $D = \overline{B_3(0)}^c$



Es gilt nun $|\frac{1}{z}| < 1$ und $|\frac{3}{z}| < 1$.

$$f(z) = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} z^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} - 1 \right) z^k$$