(b) Potenzreihenentwicklung von $\log(1-z)$ um $z=0$:

Bekanntermaßen gilt: $\frac{d}{dz}\log(1-z) = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für $|z|<1$

Potenzreihen + Stammfkt.
$$\Rightarrow \quad \log(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1} \quad \text{für } |z|<1$$

Nach Teil (a) gilt sogar: (Stetigkeitsargument)

$$\underline{\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n} \quad \text{für alle } z \in \overline{B_1(0)} \setminus \{1\}$$

Nun gilt:

$$-\log(1-e^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{i\varphi n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(\varphi n) + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(\varphi n) \quad , \varphi \in (0,2\pi)$$

Beachte: $1-e^{i\varphi} = e^{\frac{i\varphi}{2}} \cdot \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}}\right) = e^{\frac{i\varphi}{2}} \cdot \left(\underbrace{-2i}_{2e^{-i\pi/2}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{2}(\varphi-\pi)}$

und deswegen: $\log(1-e^{i\varphi}) = \ln\left|2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right| + i\,\frac{1}{2}(\varphi-\pi)$

<u>für $\varphi \in (0,2\pi)$!</u>

Nun gilt insgesamt für $\varphi = 1$:

$$-\ln\left|2\sin\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| + \underline{i\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(n) + \underline{i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(n)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(n) = \frac{\pi-1}{2}}$$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(z^{37})^n$ konvergiert nach (a) genau auf $\overline{B_1(0)} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z^{37} = 1\}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (e^{-i} z)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e^{-2i} z)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e^{-17i} z)^n$ nach (a)

(e) Siehe Landau, Gaier: "Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie" Kapitel 4 §16 Sierpinski: Bsp.