

Aufgabe 54

Sei f wie auf dem Blatt.

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f dx dy = 0 \quad (1)$$

Das innere Integral verschwindet Gott sei Dank schon für alle $y \in [0, 1]$. Also diese Reihenfolge macht keine Probleme. Nun zur zweiten Möglichkeit:

Sei $\tilde{x} \in (0, 1]$ und damit ist auch ein n_1 festgeben, so dass gilt: $\tilde{x} \in (2^{-n_1}, 2^{-n_1+1}]$.

1.Fall: $\tilde{x} \in (\frac{1}{2}, 1]$, also $n_1 = 1$.

Das heißt aber auch, dass f für dieses feste \tilde{x} folgendermaßen aussieht:

$$f(\tilde{x}, y) = 2^2 \cdot \chi_{(\frac{1}{2}, 1]}(y)$$

Und demnach nach Integrieren über y :

$$\int_{[0,1]} f(\tilde{x}, y) dy = 2$$

Das hat nun also auch mal geklappt. Nun zu den anderen Fällen:

2.Fall: $\tilde{x} \in (0, \frac{1}{2}]$, also $n_1 > 1$.

Das heißt nun aber auch: $\tilde{x} \in (2^{-n_1}, 2^{-n_1+1}] = (2^{-(n_2+1)}, 2^{-n_2}]$, wobei nun $n_2 := n_1 - 1$ der Übersicht wegen gesetzt wurde. Also nach Definition der Funktion entscheidet nun das y , welcher Wert angenommen wird. Damit ergibt sich:

$$f(\tilde{x}, y) = 2^{2n_1} \cdot \chi_{(2^{-n_1}, 2^{-n_1+1}]}(y) - 2^{2n_2+1} \cdot \chi_{(2^{-n_2}, 2^{-n_2+1}]}(y)$$

Das n_2 wurde also nur zum besseren Verständnis eingeführt, und kann nun wieder getrost zurückübersetzt werden. Nun erhält man nach einer Integration über y :

$$\int_{[0,1]} f(\tilde{x}, y) dy = 0$$

Nun kann man beide Fälle kombinieren und erhält als Integral:

$$\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f dy dx = \int_{[0,1]} 2 \cdot \chi_{(\frac{1}{2}, 1]}(x) dx = 1 \quad (2)$$

Vergleich von (1) und (2) zeigt sofort den scheinbaren Widerspruch zum Satz von Fubini. Dieser löst sich jedoch schnell auf, wenn man erkennt, dass $|f|$ nicht μ_2 -integrierbar ist. Dies zeigt man am schnellsten, indem man es für $f^+ := \max\{0, f\}$ zeigt.

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f^+ d^2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$