11.4 d) Beh: $\mathrm{Ran}(\psi^2) = \mathrm{Ran}(\psi) \iff \mathrm{Ran}(\psi) + \mathrm{Kern}(\psi) = V$

Zur Erinnerung: $\mathrm{Ran}(\psi) + \mathrm{Kern}(\psi) := \{x+y \mid x \in \mathrm{Kern}(\psi), y \in \mathrm{Ran}\,\psi\}$

„$\Rightarrow$" Also gilt $\mathrm{Ran}(\psi^2) = \mathrm{Ran}(\psi)$

Sei $x \in V$ und damit $\psi(x) \in \mathrm{Ran}(\psi^2) = \mathrm{Ran}\,\psi$

$\Rightarrow$ Findet man ein $z \in V$ mit

$\psi(\psi(z)) = \psi(x)$ Dann definiere $\psi(z) =: y$

$\Rightarrow \psi(y) = \psi(x)$

$\psi(x-y) = \psi(x) - \psi(y) = 0 \Rightarrow x-y \in \mathrm{Kern}\,\psi$

y war ein Element von $\mathrm{Ran}\,\psi$, denn $\psi(z) = y$!

Also $x = k + y$ mit einem $k \in \mathrm{Kern}\,\psi$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Kern}\,\psi + \mathrm{Ran}\,\psi$

$\Rightarrow \mathrm{Kern}\,\psi + \mathrm{Ran}\,\psi = V$ $\square$

„$\Leftarrow$" Nun gilt $\mathrm{Kern} + \mathrm{Ran} = V$ Nach a) ist bekannt $\mathrm{Ran}\,\psi^2 \subseteq \mathrm{Ran}\,\psi$

Z.z.: $\mathrm{Ran}\,\psi^2 \supseteq \mathrm{Ran}\,\psi$

Bew: Sei $x \in V \Rightarrow x = k + y$ mit $k \in \mathrm{Kern}(\psi)$, $y \in \mathrm{Ran}\,\psi$

$\Rightarrow \psi(x) = \psi(k+y) = \psi(k) + \psi(y) = \psi(y)$

$\Rightarrow y$ war Element aus $\mathrm{Ran}\,\psi$. also z.B $y = \psi(a)$ $a \in V$

$\Rightarrow \psi(\psi(a)) = \psi(x)$ $\Rightarrow$ Nochmal: aus $x, a \in V$ folgt

~~$\Rightarrow$ Ran ψ~~ $\psi(\psi(a)) = \psi(x)$

$\Rightarrow \mathrm{Ran}(\psi^2) \supseteq \mathrm{Ran}(\psi)$ $\square$

1,5 P