Aufgabe 10.4 c)

Es gilt zuerst mal:

- $\mathbb{F}$ ist ein Körper
- V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum
- $U \subset V$ ein Untervektorraum von V
- Die Äquivalenzrelation wird so definiert: $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in U$

Beh: V/U ist ein $\mathbb{F}$-Vektorraum

Bew: VR-Axiome prüfen:
Im folgenden werden die Elemente aus V/U mit $[x]$ (also wieder eine Menge!) und ein Element aus $[x]$ mit x' (also ein Element aus V) bezeichnet

(i) Abelsche Gruppe $(V/U, +)$

a) Abgeschlossenheit

$$\begin{aligned}[x]+[y] &= \Big\{x'+y' \mid x' \in [x], y' \in [y]\Big\} = \Big\{x+u_1+y+u_2 \mid u_i \in U\Big\} \\ &= \Big\{x+y+u \mid u \in U\Big\} = [x+y] \in V/U\end{aligned}$$

b) Assoziativität und Kommutativität

$$\Big([x]+[y]\Big)+[z] = \Big\{x'+y'+z' \mid x' \in [x], y' \in [y] z' \in [z]\Big\} = [x]+[z]+[y]$$

c) neutrale Element

$$[0] = \Big\{x' \mid x' \in [0]\Big\} = \Big\{x' \mid x' \sim 0\Big\} = \Big\{x' \mid x'-0 \in U\Big\} = U$$

d) inverse Element

$$\begin{aligned}[-x]+[x] &= \Big\{x'+z \mid x' \in [x], z \in [-x]\Big\} = \Big\{x+u_1+(-x)+u_2 \mid u_i \in U\Big\} \\ &= \Big\{u \mid u \in U\Big\} = U = [0]\end{aligned}$$

(ii) skalare Multiplikation

$$\begin{aligned}\lambda[x] &= \Big\{\lambda x' \mid x' \in [x]\Big\} = \Big\{\lambda(x+u) \mid u \in U\Big\} = \Big\{\lambda x + \lambda u \mid u \in U\Big\} \\ &= \Big\{\lambda x + u' \mid u' \in U\Big\} = \Big\{x' \mid x' - \lambda x \in U\Big\} = \Big\{x' \mid x' \ (\lambda x)\Big\} \\ &= [\lambda x] \in V/U\end{aligned}$$

(iii) (Distributiv)-Gesetze

$$\begin{aligned}1[x] &= [x] \\ \lambda(\mu[x]) &= (\lambda\mu)[x] \\ (\lambda+\mu)[x] &= \Big\{(\lambda+\mu)x' \mid x' \in [x]\Big\} = \Big\{(\lambda(x+u)+\mu(x+u) \mid u \in U\Big\} \\ &= \Big\{(\lambda(x+u) \mid u \in U\Big\} + \Big\{(\mu(x+u) \mid u \in U\Big\} = [\lambda x] + [\mu x] \\ \lambda([x]+[y]) &= \Big\{(\lambda(x'+y') \mid x' \in [x], y' \in [y]\Big\} = [\lambda x] + [\lambda[y]\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{F}$-Vektorraum $\square$