Aufgabensammlung zur Analysis 1

Inhaltsverzeichnis

Um die Mathematik zu lernen, muss man sie selbst angewendet haben. Aus diesem Grund gibt es unzählige Übungsaufgaben in allen Themenbereichen. Nun hat man aber nicht immer die richtige Idee oder Zeit eine Übungsaufgabe komplett zu durchdringen. Manchmal hat man solange darüber nachgedacht, dass man verzweifelt.

Nun gibt es mit Sicherheit irgendwo Lösungsskizzen oder -ideen zu finden, die oft als „Musterlösungen" angepriesen werden. Das ist aber der falsche Weg, denn ein Ergebnis vorgelegt zu bekommen oder schnell die verschiedenen Schritte herunterzurattern, missachtet die eigentliche Denkarbeit innerhalb der Übungsaufgabe.

Ich möchte genau diese Lücke mit dieser Aufgabensammlung schließen, indem ich die Lösung mit allen Gedankenschritten und Informationen fülle, die man hat und braucht, wenn man die Aufgabe wirklich lösen möchte. Ich zeichne die Bilder und Skizzen, welche man für seine Gedanken benötigt hat. Die Intention ist, dass der Leser alle Schritte nachvollziehen kann und jederzeit den Beweis und die Lösung selbstständig weiterführen kann, sobald „der Groschen gefallen ist".

Im Idealfall solltest du die Lösung zu einer Aufgabe erst lesen, wenn du dir schon genügend Gedanken über die Aufgabe gemacht hast, sodass dir die Lösung auf die Sprünge helfen oder Lücken schließen kann.

Es kommt nun aber oft vor, dass man mit der Aufgabe nichts anfangen kann, aber man eine Klausur oder Prüfung vor sich hat. In diesem Fall kann man die umfangreiche und ausführliche Lösung als eine Lernhilfe verwenden, die du lesen kannst, um das Thema besser zu verstehen und die Rechenideen zu verinnerlichen.

Selbstverständlich kannst du die Lösung auch als Überprüfung für deine eigene Lösung nutzen. Manchmal ist man sich nicht sicher, ob alle Werkzeuge richtig angewendet wurden, sodass man hier nochmals eine anschaulich erklärte und detailliert dargestellte Lösung einsehen kann.

1 Aufgaben

1.1 Aufgabe über Konvergenz von Folgen

Welche der nachstehenden Folgen sind konvergent und welche divergent? Weisen Sie den Grenzwert, falls er existiert, rigoros nach.

(a)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(b)

$$b_n = (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

(c)

$$c_n = \sqrt[n]{n}$$

Hinweis: Setzen Sie nur die Nullfolge $(1/n)$ *als bekannt voraus. In Teil (a) ist das* ε*-*N*-Kriterium anzuwenden.*

Hier geht es zur Lösung.

1.2 Aufgabe über Häufungspunkte

Wir betrachten komplexe Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und bezeichnen ein $a \in \mathbb{C}$ als einen *Häufungspunkt der Folge*, wenn in jeder offenen Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen und entscheiden Sie, ob eine konvergente Folge vorliegt.

(a)

$$a_n = e^{\mathrm{i}\pi n}$$

(b)

$$b_n = e^{\mathrm{i}\pi/n}$$

(c)

$$c_n = \left(\frac{2}{4+n}\right) e^{\mathrm{i}\pi n}$$

(d)

$$d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(e)

$$e_n = \sqrt{n}\Big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\Big)$$

(f)

$$f_n = \sqrt{n}\Big(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}\Big)$$

(g)

$$g_n = \frac{(3-n)^2}{3n^2-1}$$

(h)

$$h_n = \frac{2^n + (-3)^n}{(-2)^n + 3^n}$$

(i)

$$i_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{2 + 3n + n^2}$$

Hinweis: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

Hier geht es zur Lösung.

1.3 Aufgabe über Beispiele von geometrischen Reihen

In dieser Aufgabe dürfen Sie die übliche geometrische Reihe verwenden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \ .$$

(a) Berechnen Sie den Reihenwert der Reihe:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \ .$$

(b) Geben Sie Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, für die

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x} \right)^n$$

konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass

$$0.999999\ldots = 0.\overline{9} = 1$$

gilt.

Hier geht es zur Lösung.

1.4 Aufgabe über das Cauchy-Produkt von Reihen

Wir nennen eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty$$

gilt. Für zwei konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$, kann man eine neue Reihe mit den Summanden c_n definieren:

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \ .$$

Wir schreiben dafür kurz

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

und nennen dies das *Cauchy-Produkt* der zwei Reihen.

(a) Zeige nun, dass das Cauchy-Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen wiederum absolut konvergiert. Zeige außerdem, dass das Cauchy-Produkt dann folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{N} a_k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j \right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} c_n \ .$$

(b) Zeige mit einem passenden Beispiel, dass das Cauchy-Produkt von zwei konvergenten Reihen, die nicht absolut konvergieren, eine divergente Reihe hervorbringen kann.

Hier geht es zur Lösung.

1.5 Aufgabe über die Exponentialfunktion

In dieser Aufgabe werden wir einen möglichen Zugang zur Exponentialfunktion bearbeiten. Dazu benötigen Sie das Cauchyprodukt von Reihen aus Aufgabe 12.

(a) Es sei nun $z \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie explizit mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

absolut konvergiert.

(b) Nach Aufgabenteil (a) können wir die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definieren und nennen sie *Exponentialfunktion*. Zeigen Sie, dass diese die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ erfüllt.

Nun definieren wir die Euler'schen Zahl durch

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

und bearbeiten den Zusammenhang von der obigen Exponentialfunktion zu der bekannten Funktion e^x.

(c) Zeigen Sie, dass $e^n = \exp(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $e^r = \exp(r)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt.

(e) Benutzen Sie nun ein Stetigkeitsargument, um zu zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

gilt.

Hier geht es zur Lösung.

1.6 Aufgabe über Teleskopreihen

Betrachten Sie zuerst die folgende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \ .$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung, dass die Reihe konvergent ist und den Reihenwert 1 besitzt.

Weiterhin sei nun die folgende Reihe gegeben:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \ .$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die obige Reihe S konvergiert.

(c) Berechnen Sie den Zahlenwert der Reihe, indem Sie zuerst eine Partialbruchzerlegung vornehmen.

Hier geht es zur Lösung.

1.7 Aufgabe über Abgeschlossenheit

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt *folgenabgeschlossen*, falls die Häufungspunkte aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ wieder in der Menge A liegen. Das heißt, dass auch der Grenzwert jeder konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ ebenfalls in der Menge A liegt.

Dagegen nennen wir eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ *abgeschlossen*, wenn das Komplement $A^c := \mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist, d. h. für alle $x \in A^c$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A^c$. Hier bezeichnet $B_\varepsilon(x)$ die offene Kugel um x mit Radius ε.

Es sei $X := [0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folgen

$$a_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad b_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \quad n \geq 2$$

mit

$$a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cauchyfolgen in X sind.

(b) Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und liegt der Grenzwert in X?

(c) Zeichnen Sie die Folgen und die Menge X. Was muss an der Menge X mindestens geändert werden, damit die Menge folgenabgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ genau dann folgenabgeschlossen ist, wenn A abgeschlossen ist.

Hier geht es zur Lösung.

1.8 Aufgabe über Supremum und Infimum

(a) Bestimmen Sie für die Menge $A := \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid x, y \in [1, \infty) \right\}$ sowohl Supremum als auch Infimum.

(b) Bestimmen Sie für das Intervall $I := [a, b)$ mit reellen Zahlen $a \neq b$ das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

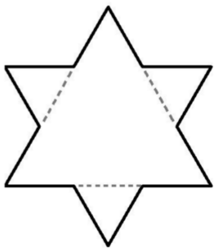
(c) Geben Sie das Supremum und Infimum von $C := \left\{ \frac{n^2}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ an.

Hinweis: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.

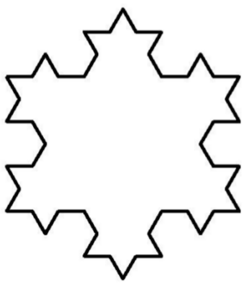
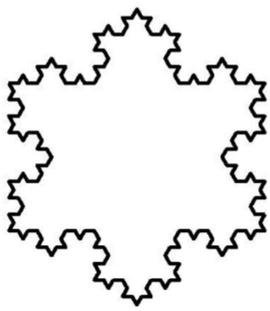
Hier geht es zur Lösung.

1.9 Aufgabe über die Koch'sche Schneeflocke

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Folge von Teilmengen in $\mathbb{R}^2$, die folgendermaßen konstruiert wird: Wir beginnen mit einem gleichseitigen Dreieck A_0, dessen Kantenlänge 1 beträgt. Nun werden alle geraden Strecken der Figur gedrittelt und auf das mittlere Drittel wird ein neues gleichseitiges Dreieck gesetzt. Wir erhalten somit die Figur A_1:

$A_1 =$ 

Das beschriebene Prinzip kann nun weiter ausgeführt werden, sodass wir eine Folge von Figuren A_n erhalten. Zur besseren Vorstellung seien hier die nächsten zwei angegeben:

$A_2 =$  $A_3 =$ 

Den Grenzwert der so rekursiv definierte Folge von Figuren $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen wir die *Koch'sche Schneeflocke*.

1. Es sei F_n als der Flächeninhalt von A_n definiert. Beweisen oder widerlegen Sie, dass die reelle Zahlenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

2. Schreiben Sie die Folge der Flächeninhalte in eine Reihe, indem Sie die zusätzliche Dreiecke jeweils addieren. Berechnen Sie dann den Reihenwert, d. h. den Flächeninhalt der Koch'schen Schneeflocke.

Hier geht es zur Lösung.

1.10 Aufgabe über Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Von einer Funktionenfolge spricht man immer, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorliegt. Man schreibt dann kurz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für diese Folge.

(a) Erklären Sie den Unterschied zwischen *punktweiser* und *gleichmäßiger* Konvergenz einer Funktionenfolge.

Betrachten Sie nun die Funktionenfolge, die durch $f_n(x) := \frac{nx}{1+|nx|}$ gegeben ist.

(b) Zeichnen Sie die Graphen von f_1, f_2, f_5 und f_{10}.

(c) Sind die obigen Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig?

(d) Berechnen Sie die Grenzfunktion punktweise, d. h. $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Liegt gleichmäßige Konvergenz vor?

Hier geht es zur Lösung.

2 Lösungen

2.1 Lösung über Konvergenz von Folgen

Diese Aufgabe befasst sich mit relativ leichten Zahlenfolgen und soll vor allem das richtige Anwenden des ε-N-Kriteriums einüben. Dieses wird üblicherweise genau andersherum aufgeschrieben als die Gedanken im Kopf, welche die

Lösung erfinden. Genau dieser Konflikt wird hier explizit betrachtet und erklärt.

Zu (a): Wenn man eine neue Folge vorgesetzt bekommt, sollte man zuerst die Anschauung spielen lassen und sich überlegen, wie die Folgenglieder verlaufen. Bei einem reziproken Verhalten wie bei der Folge (a_n) erkennt man sofort, dass die Folgenglieder immer kleiner werden und sich der Null annähern. Wir versuchen also direkt zu beweisen, dass der Grenzwert 0 ist, d. h. zu zeigen ist

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon \tag{1}$$

und zwar für beliebiges $\varepsilon > 0$. Um den Beweis nun richtig aufschreiben zu können, muss N_ε passend gewählt werden und wie die Notation schon vermuten lässt, darf dieses N_ε nur abhängig vom gewählten ε sein. Für die obige Folge ist der Zusammenhang aber ganz leicht. Wir schreiben die gewünscht Gleichung für N_ε auf und formen passend um:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}} - 0\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon^2} < N_\varepsilon \ .$$

Das heißt, wir müssen N_ε echt größer $1/\varepsilon^2$ wählen, damit unsere gewünschte Ungleichung gilt. Aufgrund der Wurzel setzen wir

$$N_\varepsilon := \frac{4}{\varepsilon^2} \ ,$$

wobei aber natürlich auch jeder andere Faktor größer als Eins es tun würde. Nun ist natürlich wichtig, dass aus $n \geq N_\varepsilon$ auch $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{N_\varepsilon}$ folgt, damit die obige Gleichung (1) auch erfüllt ist. Nun ist der komplette Gedankengang abgeschlossen, sodass wir letztendlich alles formal zu Papier bringen können.

Behauptung: 0 ist der Grenzwert von (a_n).

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Setze nun

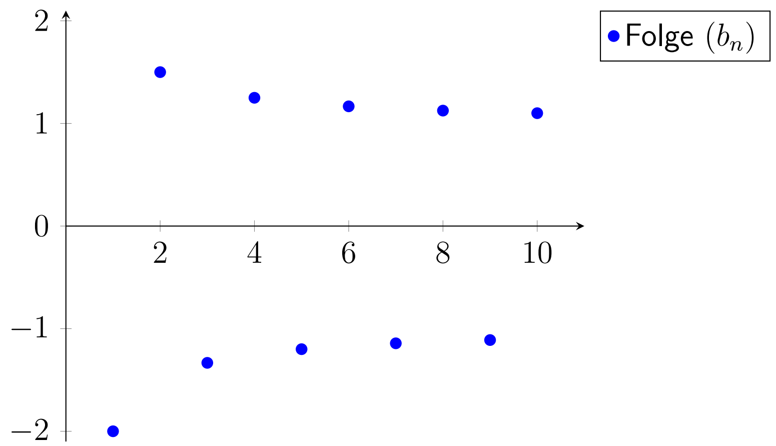
$$N_\varepsilon := \frac{4}{\varepsilon^2}$$

und betrachte ein beliebiges $n \geq N_\varepsilon$. Dann gilt

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{N_\varepsilon}} > \frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} = \left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| ,$$

und dies bedeutet, dass 0 der Grenzwert der Folge (a_n) ist. $\square$

Zu (b): Auch bei dieser Folge sollte man zuerst eine Anschauung bekommen. Es kann zum Beispiel helfen, sich die ersten Glieder aufzuzeichnen:



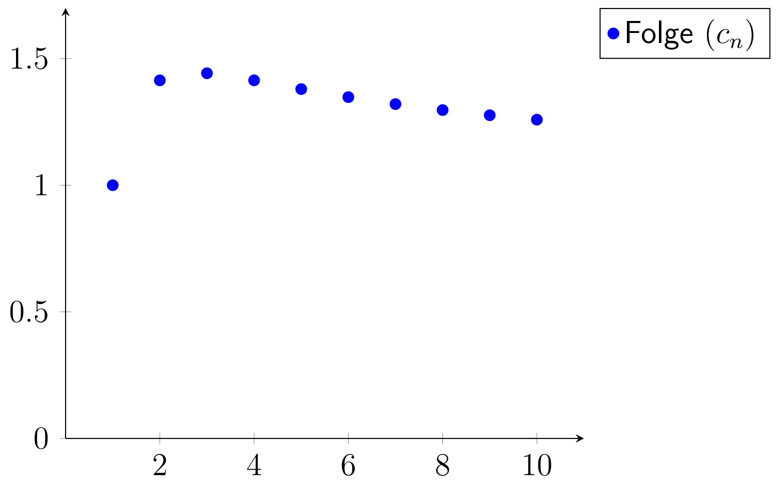
Das wechselnde Vorzeichen lässt die Folge springen, sodass es keine Konvergenz geben kann. Wir erkennen sogar, dass die geraden Glieder gegen 1 und die ungeraden Glieder gegen -1 konvergieren sollten. Dies zeigen wir nun explizit:

Wähle die Teilfolgen $g_j := b_{2j}$ und $u_k := b_{2k-1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{2j+1}{2j} \cdot (-1)^{2j} = 1 + \frac{1}{2j} \\ u_k &= \frac{2k-1+1}{2k-1} \cdot (-1)^{2k-1} = -1 - \frac{1}{2k-1} . \end{aligned}$$

Da $(1/n)$ eine Nullfolge ist konvergiert (g_j) gegen 1 und (u_k) gegen -1. Das heißt aber nichts anderes, dass die Folge (b_n) divergent ist, denn sonst würden alle Teilfolgen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Zu (c): Dies ist eindeutig die schwierigste Folge, die hier betrachtet wird, denn man sieht erstmal keine bekannte Folge. Es steigt sowohl die Zahl unter der Wurzel als auch die Wurzelpotenz selbst immer weiter an. Um der Anschauung zu helfen, sollte man auch hier die ersten Folgenglieder aufzeichnen:



Die Folge scheint immer langsamer zu fallen und zu konvergieren. Man könnte den Grenzwert 1 vermuten, aber im Prinzip wären auch andere Zahlen in der Umgebung von 1 möglich. Wir wissen aber sofort, dass der Grenzwert nicht kleiner als 1 sein kann, denn

$$n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{n} \geq 1 \; .$$

Aus diesem Grund ist es sinnvoll die Folge um den Wert 1 zu verringern, sodass man eine mutmaßliche Nullfolge erreicht. Das heißt, wir definieren:

$$\delta_n := \sqrt[n]{n} - 1 \, , \qquad \text{mit } \delta_n \geq 0 \; .$$

Das ist natürlich ein typischer Trick, denn mit Nullfolgen lässt sich einfacher argumentieren, wie wir gleich sehen werden.

In der Folge (c_n) steht die n-te Wurzel, was ein sehr unhandlicher Ausdruck ist. Durch Potenzieren der Gleichung $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ erhalten wir jedoch etwas besseres:

$$n = (1 + \delta_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k 1^{n-k} \ .$$

Nun müssen wir nur die Potenzen von δ_n betrachten und da wir wissen, dass alle Folgenglieder von (δ_n) positiv bzw. schlimmstenfalls Null sind, ist die rechte Seite in jedem Fall größer als ein einziges Summenglied. Wir greifen uns den quadratischen Term heraus:

$$n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_n^k \ > \ \binom{n}{2} \delta_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \delta_n^2 \ .$$

Jetzt sollte man erkennen, warum wir dies getan haben. Auf beiden Seiten kürzt sich ein n heraus, aber auf der rechten Seite bleibt ein $(n-1)$-Term übrig. Das bedeutet also

$$\delta_n^2 < \frac{1}{n-1} \quad \text{für alle } n \geq 2 \ ,$$

sodass (δ_n) eine Nullfolge sein muss.

Insgesamt erhalten wir, dass die Folge (c_n) konvergiert und zwar mit Grenzwert 1:

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} c_n = 1 + \lim_{n \to \infty} \delta_n = 1 \, .$$

2.2 Lösung über Häufungspunkte

Diese Aufgabe befasst sich mit reellen und komplexen Zahlenfolgen. In beiden Zahlenbereichen ist es bekanntlich möglich Abstände zwischen zwei Zahlen zu berechnen und zwar übernimmt diese Aufgabe der Betrag:

$$d(x, y) := |x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{C} \ .$$

Da man Abstände messen kann, ist ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ genau dann ein Häufungspunkt der Folge (a_n), wenn zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder gibt, die einen Abstand kleiner als ε von a haben. Deswegen spricht man von einem *Häufungspunkt* der Folge, denn die Folgenglieder häufen sich an diesem Wert an.

Wichtig für diese Aufgabe sind die Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen: Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b. Dann gilt:

(I) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist die Folge $(a_n + \lambda b_n)_n$ konvergent mit Grenzwert $a + \lambda b$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lambda b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

(II) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_n$ ist konvergent mit Grenzwert ab, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

(III) Gilt zusätzlich $b_n \neq 0$ für alle n, so ist auch die Folge $(a_n/b_n)_n$ konvergent mit Grenzwert a/b, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(IV) Gilt $a_n \leq b_n$, so gilt auch $a \leq b$.

Zu (a): Nach der Eulerschen Formel können wir die Folge umschreiben:

$$a_n = \cos(\pi n) + \mathrm{i}\sin(\pi n) = \cos(\pi n) = \begin{cases} 1\,, & n \text{ gerade} \\ -1\,, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Offensichtlich nimmt die Folge nur zwei Werte an und diese unendlich oft. Die Teilfolge mit den geraden Folgengliedern (a_{2n}) konvergiert also gegen 1, während die andere Teilfolge (a_{2n-1}) gegen -1 konvergiert. Demnach haben wir genau diese zwei Häufungspunkte. Bei zwei Häufungspunkten kann natürlich keine Konvergenz vorliegen.

Zu (b): Auch hier können wir dies nach der Eulerschen Formel umschreiben:

$$b_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \ .$$

Die Folge $(1/n)$ ist eine Nullfolge und nach Regel (I) auch die Folge (π/n). Nun sind der Sinus und der Kosinus bekanntlich stetige Funktionen, d. h. grob gesagt, dass ein Grenzwert hineingezogen werden darf. Die Folge konvergiert demnach gegen $\cos(0)$, also gegen der Wert 1. Man kann es auch noch explizit hinschreiben:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \cos(0) + \sin(0) = 1\,.\end{aligned}$$

Der Wert 1 ist folglich der einzige Häufungspunkt.

Zu (c): Hier können wir die vorherigen Ergebnisse verwenden. Wir untersuchen zuerst den ersten Faktor:

$$\frac{2}{4+n} = \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n}}\,.$$

Da $(1/n)$ eine Nullfolge ist, konvergiert die obige Folge nach Regel (I) und (III) ebenfalls gegen Null. Aus der Betrachtung der Folge (a_n) und Regel (II) wissen wir somit, dass

$$c_{2n} \longrightarrow 0\,, \quad c_{2n-1} \longrightarrow 0$$

gilt. Beide Teilfolgen haben also den gleichen Grenzwert, sodass auch die Folge (c_n) gegen Null konvergiert. Dies ist dann der einzige Häufungspunkt.

Zu (d): Hier ist es sinnvoll mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ zu erweitern:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,.$$

An dieser Stelle sollte man erkennen, dass der Nenner immer größer wird und deswegen eine Nullfolge vorliegt. Dies lässt sich auch noch schrittweise erklären: Die Folge $(1/n)$ konvergiert gegen 0 und da die Wurzelfunktion stetig ist, konvergiert auch $(1/\sqrt{n})$ gegen Null und $(1/\sqrt{1+1/n})$ gegen 1.

Nun gilt offensichtlich

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \ .$$

Nach den Regeln (I) und (III) konvergiert die Folge (d_n) demnach gegen 0. Es gibt also nur diesen einen Häufungspunkt.

Zu (e): Hier ist es ebenfalls sinnvoll mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ zu erweitern:

$$\sqrt{n}\Big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\Big) = \frac{\sqrt{n}((n+1)-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ .$$

Nun erweitern wir den Ausdruck passend, um bekannte Nullfolgen hineinzubringen:

$$e_n = \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}+1} \ .$$

Es bleibt also nur ein einziger Term zu untersuchen, nämlich

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

und diese Folge konvergiert gegen 1, da $(1/n)$ eine Nullfolge ist. Nach den Regeln (I) und (III) konvergiert die Folge (e_n) demnach gegen $1/2$. Es gibt also nur diesen einen Häufungspunkt.

Zu (f): Hier ist es sinnvoll mit $\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}$ zu erweitern:

$$\sqrt{n}\Big(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\Big) = \frac{\sqrt{n}((n^2+n)-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = n^2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}} = \frac{n^2}{\sqrt{n+1}+1} \ .$$

Dies möchten wir nun wieder auf bekannte Nullfolgen zurückführen. Dazu erweitern wir wieder passend:

$$f_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n}}} \ .$$

Der Nenner konvergiert gegen 1, jedoch ist der Zähler unbeschränkt, sodass die ganze Folge nicht konvergieren kann. Es gibt auch keinen weiteren Häufungspunkt.

Zu (g): An dieser Folge kann man folgende Umformung vornehmen:

$$\frac{(3-n)^2}{3n^2-1} = \frac{9-6n+n^2}{3n^2-1} = \frac{1-\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{1-\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}} \ .$$

Da $(1/n^2)$ und $(1/n)$ Nullfolgen sind, bildet der Zähler mit Regel (I) eine konvergente Folge mit Grenzwert 1. Ebenso bildet der Nenner mit Hilfe von Regel (I) eine konvergente Folge mit Grenzwert 3. Regel (III) zeigt letztendlich, dass die Folge konvergent ist und den Grenzwert $1/3$ hat. Dies ist dann der einzige Häufungspunkt.

Zu (h): Hier formen wir leicht um:

$$\frac{2^n+(-3)^n}{(-2)^n+3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+(-1)^n}{(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \ .$$

Nun muss man wissen, dass eine Folge der Form (p^n) für $|p|<1$ immer gegen Null konvergiert. Aufgrund des wechselnden Vorzeichens sollte die Folge (h_n) nicht konvergieren. Betrachtet man allerdings nur die geraden Folgenglieder

$$h_{2n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^k+1} \ , \quad \text{für } k=2n \ ,$$

so konvergiert diese Teilfolge gegen 1. Verwende hier die Regel (I) und (III). Ebenso konvergiert die Teilfolge

$$h_{2n-1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k-1}{-\left(\frac{2}{3}\right)^k+1} \ , \quad \text{für } k=2n-1 \ ,$$

gegen -1. Wir haben also genau diese zwei Häufungspunkte für die Folge (h_n). Bei zwei Häufungspunkten kann natürlich keine Konvergenz vorliegen.

Zu (i): An dieser Folge kann man folgende Umformung vornehmen

$$\frac{1+(-1)^n n^2}{2+3n+n^2} = \frac{(-1)^n + \frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \ .$$

Da $(1/n^2)$ und $(1/n)$ Nullfolgen sind, bildet der Nenner mit Regel (I) eine konvergente Folge mit Grenzwert 1. Der Zähler bildet jedoch aufgrund des wechselnden Vorzeichens keine konvergente Folge. Betrachtet man allerdings nur die geraden Folgenglieder

$$i_{2n} = \frac{1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{3}{k}+\frac{2}{k^2}} \ , \quad \text{für } k = 2n \ ,$$

dann konvergiert der Zähler gegen 1. Auf der anderen Seite konvergiert für ungerade Folgenglieder der Zähler gegen -1, denn

$$i_{2n-1} = \frac{-1+\frac{1}{k^2}}{1+\frac{3}{k}+\frac{2}{k^2}} \ , \quad \text{für } k = 2n-1 \ .$$

Mit der Regel (III) sind (i_{2n}) und (i_{2n-1}) zwei konvergente Teilfolgen mit Grenzwert 1 bzw. -1. Somit gibt es genau diese zwei Häufungspunkte. Bei zwei Häufungspunkten kann natürlich keine Konvergenz vorliegen.

2.3 Lösung über Beispiele von geometrischen Reihen

Dies ist einer sehr gute Übungsaufgabe. Es geht darum, die übliche geometrische Reihe verstanden zu haben und diese in neuen Problemen zu erkennen. Viele Grenzwerte oder explizite Reihendarstellungen lassen sich nämlich mit Hilfe der üblichen geometrischen Reihe umschreiben und lösen. Als einen kleinen und amüsanten Zusatz zeigen wir, dass man $0.\overline{9} = 1$ leicht mit der geometrischen Reihe zeigen kann.

Zu (a): Dies ist eine typische Rechenaufgabe. Es geht nur darum, die geometrische Reihe zu erkennen, alle Indizes richtig zu lesen und die Umformung aufzuschreiben.

Das erste, was man erkennen sollte, ist, dass wirklich eine *konvergente* geometrische Reihe vorliegt. Die Zahl, deren Potenzen summiert werden, ist nämlich $1/3$, was offensichtlich kleiner als 1 ist. Dies ist notwendig für die Konvergenz der geometrischen Reihe. Als nächstes sollte man erkennen, dass der Index nicht bei 0 losläuft und auch innerhalb der Reihe nicht exakt die gewünschte Form steht. Das muss man nun erstmal umschreiben:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} - \left(\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1}\right) \qquad \text{mit } (k := n-1) \;.$$

Damit man die Reihe beim Index $k = 0$ beginnen lassen kann, muss man die zwei zusätzlichen Summanden einfach abziehen. Wir erhalten dann zahlenmäßig

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{4}{3}$$

und haben nun die gewünschte geometrische Reihe erzeugt. Diese ist so gut bekannt, dass wir sie direkt durch den Grenzwert ersetzen können:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{4}{3} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{4}{3} \\ &= \frac{3}{3-1} - \frac{4}{3} = \frac{9}{6} - \frac{8}{6} \\ &= \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Somit ist der Reihenwert bestimmt.

Zu (b): In dieser Aufgabe wird etwas mehr verlangt, denn der Reihenwert soll für alle $x \in \mathbb{R}$ bestimmt werden, solange dieser existiert. Wir wissen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

eine konvergente geometrische Reihe ist, wenn

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1$$

gilt. Der Betrag lässt sich wie immer in zwei Fälle aufspalten, nämlich einmal den positiven und einmal den negativen Fall.

1. Fall: $0 \leq \frac{x}{1-x} < 1$. Dies lässt sich nun wirklich leicht äquivalent umformen zu:

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \ .$$

2. Fall: $-1 < \frac{x}{1-x} \leq 0$. Dies lässt sich nun ebenfalls leicht äquivalent umformen zu:

$$-1 < 0 \leq -x \ .$$

Die linke Ungleichung gilt natürlich immer, sodass hier als einzige Bedingung $x \leq 0$ übrig bleibt.

Beide Fälle zusammen genommen ergeben also nun die folgende Äquivalenz:

$$\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{2}$$

Dies bedeutet nun, dass die obige geometrische Reihe in der Tat für alle $x < \frac{1}{2}$ konvergiert, sodass wir dieses Konvergenzgebiet als Menge aufschreiben können:

$$X = (-\infty,\, 1/2) \ .$$

Den Reihenwert können wir nun ähnlich wie in Teil (a) berechnen, nämlich durch genaues Hinschauen auf den Startindex und passendes Umschreiben:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n - 1 \\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)} - 1 \\
&= \frac{1-x}{1-2x} - \frac{1-2x}{1-2x} \\
&= \frac{x}{1-2x} \,.
\end{aligned}$$

Zu (c): Dieser Aufgabenteil ist zwar nicht ganz ernst gemeint, aber auch dort kann die geometrische Reihen sinnvoll angewendet werden. Ein Dezimalausdruck ist ja nichts anders als ein Ausdruck für eine Summe von Zehnerpotenzen, positiven wie negativen. Hat man nun eine Dezimalzahl mit Periode, so wird diese Summe auf natürliche Weise eine unendliche Reihe, die selbstverständlich konvergieren muss. Aufgrund der verschiedene Potenzen, die summiert werden, liegt immer eine geometrische Reihe vor. Wir rechnen nun einfach mal genauso wie wir es vorhin gelernt haben:

$$\begin{aligned}
0.\overline{9} &= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10^n}\right) \\
&= 9\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right) \\
&= 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) \\
&= 9\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 9\left(\frac{1}{9}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Mit dieser Erkenntnis können wir die Aufgabe abschließen.

2.4 Lösung über das Cauchy-Produkt von Reihen

Diese Aufgabe ist eine sehr beliebte Aufgabe. Es geht erst das Produkt von zwei endlichen Summen auf Reihen zu verallgemeinern. Es stellt sich heraus, dass dies nur für sogenannte absolut konvergente Reihen sinnvoll definiert werden kann. Dies nennt man dann das Cauchy-Produkt der zwei Reihen.

Zu (a): An dieser Stelle sollte man sich erst mal das normale Produkt zwischen zwei endlichen Summen vorstellen:

$$(a_0 + a_1 + a_2) \cdot (b_0 + b_1 + b_2) =$$
$$= (a_0 b_0) + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_2 b_2)$$

Hier haben wir die erhaltene Terme schon wie im Cauchy-Produkt vorgesehen angeordnet. Das ist bei einer endlichen Summe ja immer möglich. Wir erhalten also

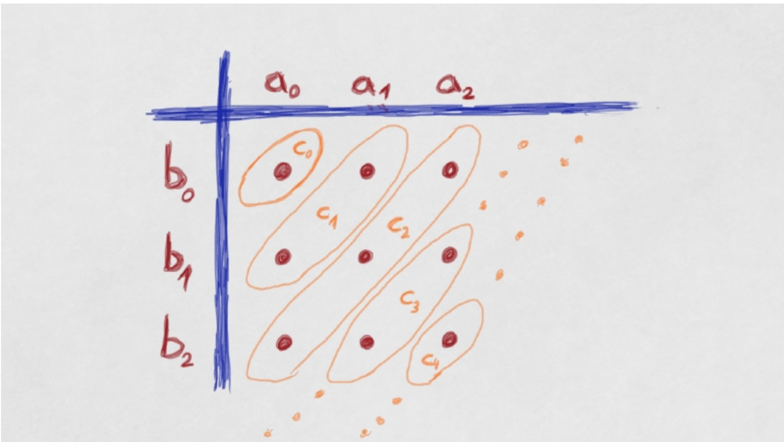
$$(a_0 + a_1 + a_2) \cdot (b_0 + b_1 + b_2) = \widetilde{c}_0 + \widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2 + \widetilde{c}_3 + \widetilde{c}_4$$

wobei $\widetilde{c}_n$ als

$$\widetilde{c}_n := \sum_{\substack{k,j=0 \\ \text{mit } j+k=n \\ k,j \leq N}}^{n} a_k b_j$$

definiert ist und $N = 2$ den größten Index der Glieder a_k und b_j bezeichnet.

Eine gute Merkregel für das Cauchy-Produkt ist auch das folgende Bild. Bei einem Produkt von zwei Summen treten alle Kombinationen auf, die addiert werden müssen. Beim Cauchy-Produkt fasst man nun die eingezeichneten Diagonalen als einzelne Pakete auf, und addiert diese.



Zum besseren Einprägen, kann man sich merken, dass c_n alle Summanden enthält, bei denen die Indices addiert genau n ergeben. Diese Anordnung ist immer möglich, sodass wir für endliche Summen folgendes explizit aufschreiben können:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j\right) = \left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_k b_j\right) \quad , \qquad n := j+k$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{2N} \sum_{\substack{k,j=0 \\ \text{mit } j+k=n \\ k,j\leq N}}^{n} a_k b_j\right) = \sum_{n=0}^{2N} \widetilde{c}_n$$

An dieser Stelle können wir die letzte Summe aufspalten. Oder wieder bildlich gesprochen: Wir nehmen zuerst die Summe bis zur größten Diagonalen im obigen Bild und danach die Summe der restlichen Terme, d. h.

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j\right) = \sum_{n=0}^{N} c_n + \sum_{n=N+1}^{2N} \widetilde{c}_n \,, \qquad \text{mit } c_n := \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \quad (2)$$

Die Umschreibung von $\widetilde{c}_n$ in c_n ist hier sehr sinnvoll, aber nur für die erste Summe, denn bei der zweiten würden Summanden auftreten, die für unsere endliche Summe überhaupt nicht definiert sind, z. B. b_{2N}. Betrachtet man das Bild oben, so liegt das daran, dass die Diagonalen nach unten hin wieder kürzer werden. Bei einer unendlichen Summe tritt dies natürlich nicht auf.

Nun aber zurück zu der eigentlichen Aufgabe. Es war ja zu zeigen, dass das Cauchy-Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen auch absolut konvergent ist. Dazu müssen wir nur die Summanden c_n betrachten:

$$|c_n| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_{n-j}|\,|b_j| \;\; .$$

Nun können wir die abbrechende Reihe über $|c_n|$ betrachten:

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} |a_{n-j}|\,|b_j| \;\; .$$

Nach der Gleichung (2) wissen wir, dass man die rechte Seite nun durch ein endliches Cauchy-Produkt ausdrücken kann. Wir können also schreiben:

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} |a_{n-j}|\,|b_j| \leq \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) \;\; .$$

Hier sollte man beachten, dass wir die positive zweite Summe aus (2) weggelassen haben. Die nun erhaltene rechte Seite konvergiert aber für $N \to \infty$, da absolut konvergente Reihen vorliegen. Es gilt demnach

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$$

und die Reihe konvergiert absolut.

Es bleibt nun nur noch die letzte Gleichung der Aufgabe zu zeigen, wobei wir die eigentliche Denkarbeit schon getan haben. Jetzt folgen hauptsächlich sinnvoll gewählte Umformungen. Die Aussage hier ist natürlich trotzdem höchst interessant. Der Grenzwert des endlichen Cauchy-Produkts liefert uns demnach das Cauchy-Produkt von Reihen. Unsere Definition ist demnach genau die richtige Verallgemeinerung. Da wir schon wissen, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j\right) = \sum_{n=0}^{N} c_n + \sum_{n=N+1}^{2N} \widetilde{c}_n$$

für alle endlichen $N \in \mathbb{N}$ gilt und dass beide Seiten konvergieren, müssen wir nun die zweite Summe über die $\widetilde{c}_n$ genauer untersuchen. Wir schreiben diese einfach mal aus:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{2N} \widetilde{c}_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{2N} \sum_{\substack{k,j=0 \\ \text{mit } j+k=n \\ k,j \leq N}}^{n} |a_k|\,|b_j| = \sum_{\substack{k,j=0 \\ \text{mit } N+1 \leq j+k \leq 2N}}^{N} |a_k|\,|b_j| \ .$$

Dies sieht nun schon erschreckend kompliziert aus, aber im Prinzip sollte man schon erkennen, dass die Summe für größere N immer kleiner wird. Explizit zeigen muss man dies hingegen durch ein weiteres Umschreiben der Summe.

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=N+1}^{2N} \widetilde{c}_n\right| &\leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ \text{mit } N+1 \leq j+k \leq 2N}}^{N} |a_k|\,|b_j| \\ &\leq \left(\sum_{N/2 \leq k \leq N} |a_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{N} |b_j|\right) + \left(\sum_{k=0}^{N} |a_k|\right)\left(\sum_{N/2 \leq j \leq N} |b_j|\right) \end{aligned}$$

Dies sieht nun wiederum kompliziert aus, aber ist genau das, was wir haben wollen. Dies werden wir gleich noch genauer sehen, aber als erstes sollte man kurz überprüfen, dass rechts mindestens alle Summenglieder abgedeckt werden. Dies sieht man aber leicht, sowie man erkennt, dass wir nun auch deutlich mehr Terme vorliegen haben. Wir können sogar noch weitere Terme hinzufügen, da wir wissen, dass die Reihen absolut konvergieren. Insgesamt erhalten wir demnach die folgende Abschätzung:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{2N} \widetilde{c}_n \right| \leq \left(\sum_{N/2 \leq k \leq N} |a_k| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{N/2 \leq j \leq N} |b_j| \right) .$$

Um diese bekannten Reihen auszunutzen, haben wir die vorherige Aufspaltung der Summe vorgenommen. Nun können wir nämlich bekanntes Wissen über Reihen verwenden. Wenn wir eine konvergente Reihe mit Gliedern, die niemals negativ sind, vorliegen haben, so muss der Reihenrest immer kleiner werden, d. h.

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \xrightarrow{N \to \infty} 0 .$$

Wenn dies nicht so wäre, so würde sich diese Rest immer weiter aufsummieren und der Reihenwert wäre unendlich. Das heißt aber für unsere Abschätzung auch

$$\left| \sum_{n=N+1}^{2N} \widetilde{c}_n \right| \xrightarrow{N \to \infty} 0 ,$$

was genau das ist, was wir zeigen wollten.

Wir können nun letztendlich schlussfolgern, dass die zwei Grenzwerte übereinstimmen, d. h.

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{N} a_k \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} b_j \right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} c_n .$$

Zu (b): Dieser Aufgabenteil ist in der Tat etwas schwieriger, da man die richtige Idee haben muss. Man sucht nun ja erstmal eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist. Demnach müssen die Reihenglieder in jedem Fall wechselnde Vorzeichen aufweisen. Weiterhin möchten wir aber, dass das Cauchy-Produkt eine Reihe liefert, die noch nicht mal konvergiert. Das übliche

Beispiel einer Reihe, die nicht konvergiert, ist wohl die harmonische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \ .$$

Nun wäre die passende Idee, da $\sqrt{k} \cdot \sqrt{k} = k$ gilt, einfache folgende Reihe anzusetzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \ .$$

Nach dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe in der Tat, aber sie ist nicht absolut konvergent, denn $1/\sqrt{k} \geq 1/k$. Nun können wir die Reihenglieder des Cauchy-Produkts ausschreiben:

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n-j+1}} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(j+1)}} \ .$$

Hier kann man nun eine elementare Ungleichung, nämlich $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ verwenden und erhält somit

$$|c_n| = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-j+1)(j+1)}} \geq \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{n+2} = (n+1)\frac{2}{n+2} \geq 1 \ .$$

Das heißt aber, dass die Summanden c_n keine Nullfolge bilden, was aber eine notwendige Voraussetzung für die Konvergenz einer Reihe ist. Demnach konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ in der Tat nicht.

2.5 Lösung über die Exponentialfunktion

Diese Aufgabe behandelt die Exponentialfunktion sozusagen von Grund auf. Wir definieren die Exponentialfunktion für jedes $x \in \mathbb{R}$ als eine Reihe und werden schrittweise nachweisen, dass dies in der Tat mit der üblichen Potenz e^x übereinstimmt.

Zu (a): In dieser Aufgabe werden wir das grundlegende Majorantenkriterium herbeiziehen, was besagt, dass eine Reihe konvergiert, wenn man diese gliedweise durch eine bekannte konvergente Reihe abschätzen kann. Aufgrund der vorkommenden Potenzen von z würde sich wohl eine geometrische Reihe anbieten. Da aber der Betrag von z beliebig groß gewählt sein kann, müssen wir ein wenig weiter ausholen. Auf jeden Fall wollen wir zeigen, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Ungleichung

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| < Dq^n \quad \text{mit } |q| < 1$$

für eine Konstante D und für alle natürliche Zahlen $n > N$ ab einer gewissen Grenze N gilt. Dann würde nämlich das Majorantenkriterium mit Hilfe der geometrischen Reihe greifen. Im Weiteren präsentieren wir nun den vollständigen Beweis der obigen Ungleichung.

Es sei nun $z \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest gewählt und weiterhin $0 < q < 1$ eine reelle Zahl. Offensichtlich können wir nun ein $N \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass

$$|z| < (N+1)\,q$$

gilt. Die Zahl q soll natürlich unsere geometrische Reihe ab Ende bilden. Warum wir diese Wahl von N getroffen haben, zeigt nun die folgende Umformung:

$$q > \frac{|z|}{(N+1)} = \frac{\frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}}{\frac{|z|^N}{N!}} = \left|\frac{\frac{z^{N+1}}{(N+1)!}}{\frac{z^N}{N!}}\right| .$$

Wenn wir nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$ wählen, so gilt diese Ungleichung natürlich immer noch, d. h.

$$q > \left|\frac{\frac{z^n}{n!}}{\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}}\right| .$$

Um nun noch eine weitere natürlich Zahl einzuführen, erinnern wir uns daran, dass es für jedes n immer ein m_n derart geben muss, dass $n - m_n = N$ gilt. Wir können nun also genau m_n Schritte durchführen, nämlich so:

$$\left|\frac{\frac{z^n}{n!}}{\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}}\right| \cdot \left|\frac{\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}}\right| \cdot \left|\frac{\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}}{\frac{z^{n-3}}{(n-3)!}}\right| \cdots \left|\frac{\frac{z^{n-m_n+1}}{(n-m_n+1)!}}{\frac{z^{n-m_n}}{(n-m_n)!}}\right|$$

Nun sollte man erkennen, dass für jeden Faktor die obige Ungleichung mit q

gilt und dass wir jeweils Nenner und Zähler kürzen können. Dies führt dann zu:

$$q^{m_n} > \left| \frac{\frac{z^n}{n!}}{\frac{z^N}{N!}} \right|$$

und zwar für alle $n > N$. Oder anders gesagt: Für alle $n > N$ gilt die Ungleichung

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| < \underbrace{\left| \frac{z^N}{N!} \right|}_{=:C} q^{m_n} \ .$$

Dies ist nun schon in einer ähnlichen Form wie wir das Majorantenkriterium haben wollen. Der Vorfaktor vor dem q^{m_n} ist wirklich eine Konstante, da er nicht von n abhängt. Andererseits wissen wir, dass $m_n = n - N$, d. h. wir können die Ungleichung nun in einer neuen Form aufschreiben:

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| < Cq^{m_n} = \underbrace{Cq^{-N}}_{=:D} q^n = Dq^n \ .$$

Nun stehen rechts die Reihenglieder der geometrischen Reihe, die natürlich konvergent ist und links die Glieder unserer betrachteten Exponentialreihe. Somit ist die Konvergenz nach dem Majorantenkriterium gezeigt.

Zu (b): Während der erste Teil dieser Aufgabe etwas trickreich war, ist dieser Teil eine typische Standardaufgabe. Um die Funktionalgleichung zu zeigen, ist die beste Methode das Cauchy-Produkt von Reihen zu verwenden. Siehe dazu auch Aufgabe 12.

$$\begin{aligned}
\exp(z_1)\cdot\exp(z_2) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z_2^j}{j!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{z_1^{n-j}}{(n-j)!}\cdot\frac{z_2^j}{j!} \qquad \text{(Cauchy-Produkt)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{n!(n-j)!j!}\,z_1^{n-j}z_2^j \qquad \text{(erweitern)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z_1^{n-j}z_2^j\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n\\
&= \exp\left(z_1+z_2\right).
\end{aligned}$$

Dies schließt schon Teil (b) ab.

Zu (c): Um etwas für alle natürliche Zahlen zu zeigen bietet sich sehr oft eine vollständige Induktion an. So auch hier:

IA: Für $n_0 = 1$ gilt offensichtlich schon per definitionem

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \exp(1)$$

und damit die behauptete Aussage.

IV: Für ein beliebiges aber fest gewähltes $n \geq 1$ gelte

$$e^n = \exp(n)\ .$$

IS: Wir gehen nun von n auf $n+1$ und betrachten dann folgendes:

$$\begin{aligned}
e^{n+1} &= e^n e^1 \qquad \text{(Potenzgesetz für natürliche Exponenten)}\\
&\overset{\text{IV}}{=} \exp(n)\cdot\exp(1) \qquad \text{(mit IA)}\\
&= \exp(n+1) \qquad \text{(mit Funktionalgleichung aus Teil (b))}
\end{aligned}$$

Das Induktionsprinzip beweist somit die gesamte Aussage für alle $n \geq 1$.

Zu (d): In diesem Aufgabenteil sollen wir die gleiche Identität wie in (c) zeigen, nur jetzt sogar für alle rationale Zahlen. Als ersten stellen wir fest, dass aus der Funktionalgleichung

$$\exp(n) \cdot \exp(-n) = \exp(0) = 1$$

folgt. Und daraus folgt wiederum, dass

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \overset{(c)}{=} \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

für alle natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir haben demnach die Identität auch sehr schnell für die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gezeigt. Für eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ schreiben wir nun

$$r = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{Z}$$

und rechnen folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
(e^r)^q \;&=\; \left(e^{\frac{p}{q}}\right)^q \;=\; e^p \qquad\qquad \text{(Potenzgesetze)} \\
&=\; \exp(p) \;=\; \exp\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) \\
&=\; \exp\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right) \qquad (q \text{ Summanden}) \\
&\overset{\text{(b)}}{=}\; \exp\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \cdots \cdot \exp\left(\frac{p}{q}\right) \qquad (q \text{ Faktoren}) \\
&=\; (\exp(r))^q \;.
\end{aligned}$$

Das Ziehen der q-ten Wurzel liefert nun das gewünschte Ergebnis. Beachte dabei, dass beide Zahlen wirklich positiv sind, sodass das Wurzelziehen keine Probleme macht.

Zu (e): Hier muss nicht mehr viel gezeigt werden. Beide Funktionen sind stetig, sodass wir für eine beliebige reelle Zahl x eine rationale Folge $(r_n) \subset \mathbb{Q}$

wählen können mit

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x \ .$$

Dementsprechend können wir für die einzelnen Folgenglieder das Ergebnis aus Teil (d), nämlich die Gleichheit von e^{r_n} und $\exp(r_n)$, verwenden und die folgende kurze Rechnung aufschreiben:

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{n\to\infty} e^{r_n} \qquad \text{(Stetigkeit)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp(r_n) \qquad \text{(Teil (b))} \\ &= \exp(x) \qquad \text{(Stetigkeit)} \end{aligned}$$

Es sei bemerkt, dass wir im letzten Schritt das Wissen über die Stetigkeit der Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vorausgesetzt und verwendet haben. Diese zu zeigen ist aber nicht schwierig und wird meistens in der Vorlesung abgehandelt, da dies allgemein für jede Potenzreihe gilt. Ich habe im Themengebiet *Funktionentheorie* dazu viele Aufgaben und Lösungen, die du dir gerne anschauen kannst, wenn du weiteres Interesse an Potenzreihen und deren Konvergenzeigenschaften hast.

2.6 Lösung über Teleskopreihen

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit einem wichtigen Rechentrick für die Beschäftigung mit Reihen und deren Reihenwerte. In manchen Fällen lässt sich die Reihe derart auseinander ziehen, dass man zwei sehr ähnliche Summen verrechnen kann. Im besten Fall eliminieren sich alle Summanden bis auf den ersten und den letzten, sodass man nur noch den Grenzwert durchführen muss. Man spricht in diesem Fall salopp von einer *Teleskopsumme* bzw. im Grenzwert von einer *Teleskopreihe*, da man die Summe anschaulich wie ein Teleskop zusammenschieben kann.

Zu (a): Diese Reihe ist in der Tat das typische und ein einfaches Beispiel einer Teleskopreihe. Dementsprechend ist es sinnvoll mit diesem zu beginnen und wir werden gleich sehen, dass mal viele Reihen auf die obige zurückführen kann.

Wir beginnen die Aufgabe, indem wir den Bruch, wie als Hinweis gegeben, mittels einer Partialbruchzerlegung umschreiben. Diese führt man üblicherweise von Hand durch und schreibt:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} \ .$$

Hier sind nun $A, B \in \mathbb{R}$ so gesucht, dass die Gleichung erfüllt ist. Um diese Koeffizienten zu bestimmen, sollte man diese Gleichung aber nochmals mit dem Hauptnenner auf beiden Seiten multiplizieren. Man erhält dann

$$1 = A(n+1) + Bn \ ,$$

was eine viel leichtere Gleichung ist. Üblicherweise ordnet man die Terme nun nach den Potenzen von n und führt einen Koeffizientenvergleich durch, um zwei Gleichungen für A und B zu erhalten. In unserem Fall ist das nun

$$1 = n(A+B) + A \cdot 1 \ ,$$

und daraus folgt

$$A + B = 0 \quad \text{und} \quad A = 1 \ .$$

Demnach gilt für unsere Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \ . \tag{3}$$

Nun können wir uns wieder der Reihe zuwenden, die wir ja nach der Konvergenz gefragt haben. Dass eine Reihe konvergiert, heißt aber nichts anderes, als dass die Folge der Partialsummen konvergiert. Deswegen untersuchen wir für ein festes $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \overset{(3)}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

Man sollte hier beachten, dass man hier nicht einfach $N = \infty$ setzen kann, denn das wäre grob falsch. Es würden dann nämlich zwei harmonische Reihen vorliegen, die bekanntermaßen divergieren. Der Ausdruck, der sich ergibt, wäre $\infty - \infty$ und ergibt leider keinen Sinn. Aus diesem Grund muss man sich so gut wie immer erst auf die Partialsummen S_N zurückziehen. Wenn wir nun weiter rechnen und die zweite Summe durch $k := n+1$ im Index verschieben

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} \ ,$$

so erhalten wir plötzlich die selben Summen, die voneinander abgezogen werden. Nur der erste Summand in der ersten Summe und der letzte in der zweiten Summe, tauchen nicht zweimal auf. Oder nochmals in Formeln:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} + \left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Die runde Klammer ergibt also wunderbar Null. Das „Teleskop" wurde demnach zusammengeschoben und wir erhalten einen kurzen Ausdruck für die Partialsummen

$$S_N = 1 + \frac{1}{N+1}$$

und dieser konvergiert auch noch ohne Probleme, sodass wir unser Endergebnis präsentieren können:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \ = \ \lim_{N \to \infty} S_N \ = \ 1 + \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \ = \ 1 \ .$$

Zu (b): In diesem Aufgabenteil sollen wir verwenden, dass die Reihe aus (a) eine konvergente ist, d. h. wir versuchen das Majorantenkriterium für Reihen anzuwenden. Dieses besagt, dass wir die Reihe gliedweise durch eine konvergente Reihe abschätzen können. Zu zeigen wäre hier also:

$$\frac{1}{4n^2 - 1} < \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{für alle } n \geq N_0$$

ab einem gewissen und fest gewählten N_0. Diese Feststellung ist schon alles, was man benötigt. Nun kann man sich davon sozusagen rückwärts auf eine einfachere und bekannte Aussagen zurückziehen. Das ist die einfachste

Methode, denn man versucht durch elementare Methoden die Ungleichung aufzuschreiben. Wenn man dies geschafft hat, dann kann man diese Äquivalenzumformung in der üblichen Reihenfolge aufschreiben:

$$\begin{aligned}
& 3n^2 \; > \; n+1 \quad \text{(Direkt klar oder mit Induktion leicht zu zeigen!)} \\
\Leftrightarrow \quad & -3n^2 + n + 1 \; < \; 0 \qquad | + 4n^2 - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & n^2 + n \; < \; 4n^2 - 1 \\
\Leftrightarrow \quad & n(n+1) \; < \; 4n^2 - 1 \qquad | \text{ (Kehrwert)} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n(n+1)} \; > \; \frac{1}{4n^2 - 1}
\end{aligned}$$

Somit haben wir alle Reihenglieder durch die konvergente Reihe abgeschätzt, sodass

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

nach dem Majorantenkriterium konvergieren muss.

Zu (c): Im letzten Teil der Aufgabe werden wir nun den Reihenwert S bestimmen, der nach Teil (b) ja endlich ist. Dies werden wir nun ähnlich, wie in Teil (a) erledigen. Dazu benötigen wir also zuerst eine passende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \; .$$

Dies muss nun wiederum mit dem Hauptnenner multipliziert werden. Wir erhalten dann die folgende Gleichung:

$$1 = n(2A + 2B) + (A - B) \; .$$

Der Koeffizientenvergleich liefert nun leicht die zwei Gleichungen:

$$A = -B \quad A - B = 1 \; .$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem kann nun schnell bestimmt werden:

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2} \ .$$

Letztendlich können wir uns wieder um die Partialsummen kümmern und schreiben auf:

$$S_N \ = \ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1} \ = \ \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} \right) \ .$$

Wir werden nun wieder eine passende Indexverschiebung $k = n+1$ durchführen.

$$\begin{aligned}
S_N \ &= \ \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{2k-1} \right) \\
&= \ \frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2n-1} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{2k-1} \right) \ + \ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+1} \\
&= \ \frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+1}
\end{aligned}$$

Dies ist wieder eine wunderbar konvergente Folge und wir erhalten den Reihenwert

$$S = \lim_{N \to \infty} S_N = \frac{1}{2} \ ,$$

was die Aufgabe beendet.

2.7 Lösung über Abgeschlossenheit

Diese Aufgabe befasst sich mit dem Konzept der Abgeschlossenheit von Mengen. In dieser Aufgabe wird nun unter anderem gezeigt, dass die sogenannte Folgenabgeschlossenheit in $\mathbb{R}^2$ äquivalent zur Abgeschlossenheit schlechthin ist. Dies gilt sogar in jedem metrischen Raum, sodass man in der Analysis selten zwischen beiden Begriffen unterscheiden muss. Der Vorteil der Beschreibung durch Folgen liegt auf der Hand. Man kann sich Folgen und deren Grenzwerte in jedem Raum besser vorstellen, als das Komplement auf Offenheit zu untersuchen. Die Folgenabgeschlossenheit besagt nun ja gerade, dass man eine Folge innerhalb einer abgeschlossenen Menge betrachtet und die Häufungspunkte bzw. der Grenzwert dieser Folge nicht aus der Menge herauskommen können. Der „Rand“ der Menge, die man sich irgendwie vorstellen kann, gehört komplett der Menge selbst. Es gibt für Folgen also kein Entkommen nach draußen durch eine „offene Stelle“. Deswegen spricht man von abgeschlossenen Mengen. Alle Türen sind zu und abgeschlossen.

Zu (a): Die erste Feststellung in dieser Aufgabe ist, dass sowohl $a_n \in X$ als auch $b_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wenn man nun weiß, dass $(1/n)$ eine Nullfolge ist, so ist die Vorstellung, dass beide Folgen in $\mathbb{R}^2$ konvergieren sollten und dementsprechend Cauchyfolgen sind. Wir werden dies nun aber explizit formulieren:

Es gilt immer, dass eine konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist. Die Umkehrung davon ist aber nur in sogenannten vollständigen Räumen richtig. Wenn wir nun also nachweisen, dass (a_n) im Raum $\mathbb{R}^2$ konvergiert, so wissen wir, dass dies auch eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^2$ ist. Da $(1/n)$ eine Nullfolge ist, konvergieren auch die einzelnen Komponenten von (a_n) und somit die ganze Folge. Es gilt sogar:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\ \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Das heißt also, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist $\mathbb{R}^2$ ist. Da nun aber alle Folgenglieder in X liegen und X eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist, die den gleichen Abstandsbegriff trägt, nämlich die euklidsche Norm, kann sich die Cauchy-Eigenschaft nicht verändern. Nochmal zu Erinnerung: Das Cauchykriterium nimmt nur Rückgriff auf die einzelnen Folgenglieder und den Abstand zwischen diesen. Demnach ist (a_n) auch eine Cauchyfolge in X.

Das Argument für die Folge (b_n) läuft natürlich völlig identisch. Wir können aber auch noch den Grenzwert in $\mathbb{R}^2$ berechnen:

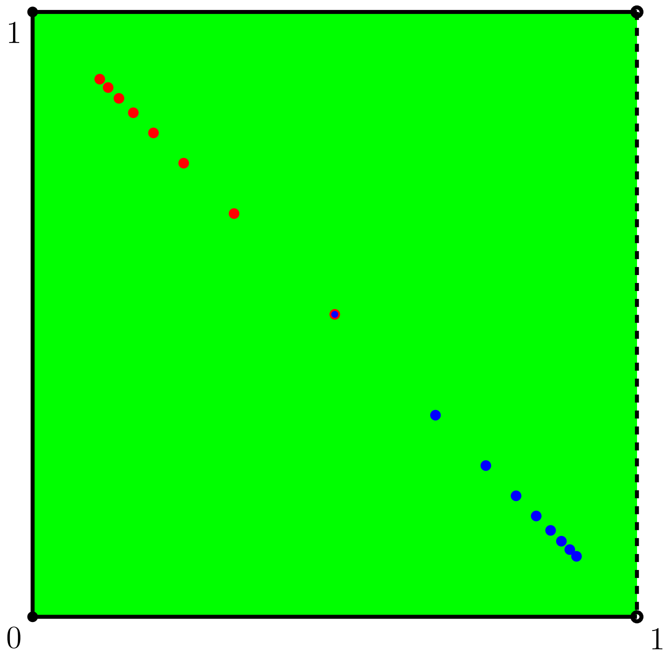
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Zu (b): Dieser Aufgabenteil ist nun auch schon fast fertig bearbeitet. Wir haben festgestellt, dass die zwei Folgen im „großen“ Raum $\mathbb{R}^2$ konvergent sind und die zwei Grenzwerte berechnet. Da der Grenzwert eindeutig ist, müssen wir nur schauen, ob dieser in X liegt oder nicht. Für die Folge (a_n) liegt der Grenzwert in der Menge X. Demnach ist (a_n) eine konvergente Folge in X. Für die Folge (b_n) liegt der Grenzwert jedoch nicht in der Menge X. Diese bedeutet, dass (b_n) zwar eine Cauchyfolge in der Menge X ist, aber keine *konvergente* Folge *in* X ist. Es kann ja keinen weiteren Grenzwert geben, der nun doch in X liegt. Wir haben nun also auch gezeigt, dass der Raum X nicht vollständig ist. Es fehlen gewisse Punkte, die erst hinzugenommen werden müssten, damit der Raum vollständig wird.

Zu (c): Nun zeichnen wir die Menge X und die zwei Folgen. Da der rechte Rand der Menge X nicht selbst zu X gehört, zeichnen wir diesen gestrichelt. Offensichtlich ist dieser fehlende Rand genau das Problem, dass die Menge X nicht folgenabgeschlossen ist. Genau wie die Folge (b_n) kann man sich eine Folge vorstellen, die in der Menge X liegt und sich immer näher einen Punkt des rechten Randes nähert. Diese Folge konvergiert zwar in $\mathbb{R}^2$ aber nicht innerhalb der Menge X, da genau der Grenzwert fehlt. Die modifizierte Menge ist demnach

$$\widetilde{X} = [0,1] \times [0,1]$$

und somit eine folgenabgeschlossene Menge. Anschauchlich gehört nun der ganze Rand zu der Menge und es gibt keine „Löcher“ aus der eine Folge aus der Menge entkommen könnte. Deswegen spricht man von abgeschlossenen Mengen.



Zu (d): In dieser Aufgabe zeigen wir die wichtige Implikation, dass man nicht zwischen den zwei Abgeschlossenheitsbegriffen unterscheiden muss. Zumindest in $\mathbb{R}^2$ stimmen diese überein. Wir werden sogar sehen, dass die zwei Begriffe in jedem metrischen Raum übereinstimmen und erst in noch allgemeineren Strukturen wirklich verschieden sind. In der Analysis 1 reichen metrische Räume aber in allen Situationen aus, sodass man sich die Abgeschlossenheit immer mit Folgen veranschaulichen kann.

Nun aber zum Beweis der Aussage. Es stellt sich heraus, dass die Argumentation viel einfacher wird, wenn man anstatt den zwei Implikationen die entsprechenden Kontrapositionen nachweist. Das heißt, wir zeigen die Aussage

$$A \text{ nicht abgeschlossen} \iff A \text{ nicht folgenabgeschlossen},$$

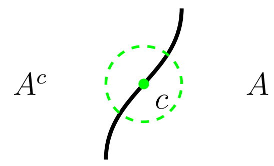
welche bekanntlich äquivalent zu Ursprungsaussage ist.

($\Rightarrow$): Es gelte also, dass A nicht abgeschlossen ist, was bedeutet, dass das Komplement A^c nicht offen ist. Dies bedeutet allerdings, dass es einen Punkt

$c \in A^c$ derart gibt, dass

$$B_\varepsilon(c) \cap A \neq \emptyset \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

gilt. Das heißt, für diesen Punkt c kann keine Epsilonumgebung gewählt werden, die vollständig in der Menge A^c liegt. Anschaulich liegt dieser Punkt auf dem Rand der Menge A^c:



Da nun aber in jeder beliebigen Epsilonkugel um c mindestens ein Punkt aus der Menge A liegt, können wir diesen Punkt auswählen und eine Folge (a_n) konstruieren, wobei

$$a_n \in B_{1/n}(c)$$

gilt. Nach Definition des Grenzwertes gilt also, dass $(a_n) \subset A$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \ .$$

Da aber c in jedem Falle kein Element der Menge A ist, ist diese Menge A nicht folgenabgeschlossen.

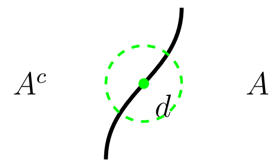
($\Leftarrow$): Die umgekehrte Implikation ist mit ähnlichen Mitteln zu zeigen. Nun nehmen wir an, dass A nicht folgenabgeschlossen ist. Das heißt aber, es gibt mindestens einen Folge $(a_n) \subset A$, die konvergiert und einen Grenzwert außerhalb der Menge A hat:

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: d \in A^c \ .$$

Legen wir nun eine Epsilonkugel um diesen Grenzwert d, so wissen wir nach der Definition der Konvergenz einer Folge, dass unendlich viele Folgenglieder innerhalb dieser Kugel liegen müssen. Anders ausgedrückt:

$$B_\varepsilon(d) \cap A \neq \emptyset \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \ .$$

Das heißt aber, dass die Menge A^c nicht offen sein kann, denn es gibt einen Punkt d, der wieder anschaulich am Rand liegt:



Dementsprechend ist die Menge A nicht abgeschlossen und beide Implikationen sind gezeigt. □

2.8 Lösung über Supremum und Infimum

In der Analysis sind die Begriffe Supremum und Infimum enorm wichtig. Meistens werden Sie für Teilmengen der reellen Zahlen definiert und benutzt. Die Definition kann aber auch leicht ausgeweitet werden, denn man benötigt ja nur eine beliebige Menge M mit einem Ordnungsbegriff $\prec$, sodass man von größeren und kleineren Elementen sprechen kann. In dieser Aufgabe rechnen wir jedoch nur mit den reellen Zahlen und der üblichen Anordnung $\leq$.

Zu (a): Hier muss man zuerst die Anschauung verwenden: Wir ziehen zwei positive Zahlen voneinander ab, die immer kleiner gleich 1 sind. Demnach muss das Ergebnis immer zwischen -1 und 1 liegen. Dies sollten auch Infimum und Supremum sein, da wir uns beliebig nähern können. Nun aber zum richtigen Beweis:

Behauptung: 1 ist das Supremum von A.

Beweis: Das Supremum ist die kleinste obere Schranke, d. h. es sind immer zwei Dinge zu zeigen. Zuerst zeigen wir, dass 1 eine obere Schranke ist. Dann zeigen wir, dass es keine kleinere geben kann.

Da y immer positiv gewählt ist, gilt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

für alle $x, y \in [1, \infty)$ und dies bedeutet ja gerade, dass 1 eine obere Schranke von A ist.

Um zu zeigen, dass 1 auch die kleinstmögliche obere Schranke ist, wählen wir ein beliebiges $1 > \varepsilon > 0$. Zu diesem ε gibt es nun aber ein passendes $a_\varepsilon \in A$, nämlich:

$$a_\varepsilon := \frac{1}{1} - \frac{1}{y_\varepsilon} \quad \text{mit} \quad y_\varepsilon := \frac{2}{\varepsilon} \in [1, \infty] \, .$$

Dieses a_ε erfüllt aber gerade $a_\varepsilon > 1 - \varepsilon$. Damit ist $1 - \varepsilon$ für kein einziges $\varepsilon > 0$ eine obere Schranke der Menge A und so ist 1 tatsächlich die kleinste. Oder anderes formuliert: $1 = \sup A$. □

Behauptung: -1 ist das Infimum von A.

Beweis: Das Infimum ist die größte untere Schranke, d. h. auch hier sind zwei Dinge zu zeigen. Einerseits muss -1 eine untere Schranke sein und andererseits darf es auch keine größere geben. Der ganze Beweis läuft nun völlig analog zum Supremumsbeweis:

Da x immer positiv gewählt ist, gilt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq -\frac{1}{y} \geq -1$$

für alle $x, y \in [1, \infty)$ und dies bedeutet nun, dass -1 eine untere Schranke von A ist.

Um zu zeigen, dass -1 auch die größtmögliche obere Schranke ist, wählen wir ein beliebiges $1 > \varepsilon > 0$. Zu diesem ε gibt es nun aber ein passendes $b_\varepsilon \in A$, nämlich:

$$b_\varepsilon := \frac{1}{x_\varepsilon} - \frac{1}{1} \quad \text{mit} \quad x_\varepsilon := \frac{2}{\varepsilon} \in [1, \infty] \, .$$

Diese b_ε erfüllt aber nun $b_\varepsilon < -1 + \varepsilon$. Damit ist $-1 + \varepsilon$ für kein einziges $\varepsilon > 0$ eine untere Schranke der Menge A und so ist -1 tatsächlich die größte, oder anderes formuliert: $-1 = \inf A$. $\square$

Anmerkung zu diesem Beweis: In der Analysis ist das eine typische Argumentation. Man wählt ein beliebiges und kleines $\varepsilon > 0$ und macht es mit einem Faktor $1/2$ noch ein wenig kleiner, um eine passende *echte* Ungleichung zu zeigen.

Zu (b): In dieser Aufgabe soll nun neben dem Supremum und Infimum noch das Maximum und Minimum bestimmt werden. Der Unterschied zwischen den Begriffen ist sehr klein, aber durchaus wichtig. Von einem Maximum einer Menge kann man nur reden, wenn das Supremum, falls es eines gibt, auch selbst ein Element der Menge ist. Analog spricht man von einem Minimum, wenn das Infimum selbst ein Element der Menge ist.

Um den Unterschied deutlich zu machen, ist das Intervall $I = [a, b)$ genau das passende Beispiel. Ohne große Probleme sehen wir, dass $a = \inf I$ und $b = \sup I$. Dort ist wirklich nicht viel zu zeigen, da Intervalle genau so definiert sind.

Da das Infimum a ist und selbst in dem Intervall liegt, existiert das Minimum mit dem Wert a. Man kann nun auch schreiben

$$\min I = a \ .$$

Das Supremum liegt aber nicht im Intervall und deswegen müssen wir sagen

$$\max I = \text{ existiert nicht.}$$

Maximum und Minimum sind Eigenschaften der Menge, die nur von der Menge selbst abhängen und nicht davon, was sich noch außerhalb davon befindet. Wenn man selbst nur in der Menge I lebt und einen maximalen Wert erreichen möchte, so stellt man fest, dass man zwar immer größer werden kann, aber es keine Zahl gibt, die wirklich am größten ist. Man kann ja immer noch ein wenig darauf addieren.

Zu (c): Nun betrachten wir eine abzählbare Menge. Dort kann es sich lohnen, die ersten Elemente explizit aufzuschreiben:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \dots \right\} .$$

Das größte hier auftauchende Element ist eindeutig $\frac{9}{8}$. Und wir wissen, dass die Exponentialfunktion viel schneller wächst als ein Polynom[1], sodass der Nenner immer größer als der Zähler wird. Daraus schließen wir:

$$\sup C = \frac{9}{8} \quad \text{und} \quad \inf C = 0 \; .$$

In Bezug auf die vorherige Aufgabe können wir sogar wieder feststellen, dass die Menge ein Maximum aber kein Minimum besitzt.

2.9 Lösung über die Koch'sche Schneeflocke

In dieser Aufgabe wird die Koch'sche Schneeflocke behandelt, die ihren Namen einerseits nach dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch und andererseits aufgrund ihres Aussehens trägt. Wir betrachten hier die schrittweise Konstruktion dieser Figur und werden den Flächeninhalt berechnen.

Zu (1): Dieser Aufgabenteil ist viel leichter als er vielleicht erst erscheint. Es geht hier nicht darum, den Grenzwert zu berechnen, sondern nur darum, die Konvergenz oder Divergenz zu erkennen und zu beweisen. Dazu sollte man das folgende Konvergenzkriterium kennen:

Konvergenzkriterium. Es sei eine reelle Folge (a_n) gegeben.

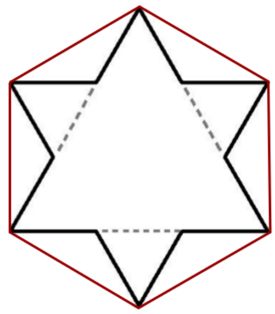
(a) Ist die Folge monoton wachsend, d. h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und nach oben beschränkt, dann konvergiert die Folge.

(b) Ist die Folge monoton fallend, d. h. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und nach

[1] Versuche dies zum Beispiel mit dem Satz von l'Hospital zu zeigen.

unten beschränkt, dann konvergiert die Folge.

Wir müssen also nur zwei Dinge nachweisen. Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offensichtlich monoton wachsend, denn es kommen in jedem Schritt weitere Dreiecke hinzu, sodass der Flächeninhalt weiter wächst. Andererseits sollte man auch erkennen, dass sich die Figur nicht immer weiter ausbreitet. Am besten sieht man dies, indem man ein passendes Sechseck zeichnet:



Die Eckpunkte der neuen gleichseitigen Dreiecke, werden immer innerhalb oder auf den Seiten des Rechtecks liegen, was man mit ein paar Winkeln und Dreiecksberechnung genau nachprüfen kann. Dies ist nicht sehr schwer, aber an dieser Stelle auch nicht im kompletten Detail notwendig. Man hätte auch ein großes Quadrat oder einen Kreis um diese Figur legen können, und dann wäre auch direkt offensichtlich gewesen, dass sich der gesamte Flächeninhalt im Innern abspielen muss.

Unabhängig wie man es geometrisch genau begründen möchte, man findet immer, dass die Folge der Flächeninhalte beschränkt ist. In Kombination mit der Monotonie bringt uns das obige Konvergenzkriterium, dass die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Zu (2): Während wir uns in Teil (1) vor expliziten Rechnungen gedrückt haben und auch gut damit weggekommen sind, müssen wir in diesem Aufgabenteil nun wirklich Zahlen spielen lassen. Dazu verwenden wir die folgenden

Definitionen:

$$\begin{aligned} k_n &:= \text{ Kantenlänge der im } n\text{-ten Schritt neu hinzukommenden Dreiecke} \\ h_n &:= \text{ Höhe der im } n\text{-ten Schritt neu hinzukommenden Dreiecke} \\ d_n &:= \text{ Anzahl der im } n\text{-ten Schritt neu hinzukommenden Dreiecke} \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass im ersten Schritt die Kantenlänge $k_1 = \frac{1}{3}$ beträgt. Da die neuen Dreiecke mit einem Drittel der Kantenlänge auf die alten Dreiecke „gesetzt" werden, gilt demnach

$$k_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ .$$

Nun ist es kein Geheimnis, dass die Innenwinkel in einem gleichseitigen Dreieck alle $60°$ betragen. Aus diesem Grund lässt sich die Höhe direkt mit dem Tangens berechen:

$$h_n = \tan(60°)\,\frac{k_n}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \ .$$

Als letzte Größe benötigen wir nun nur noch die Anzahl der Dreiecke. Diese müssen wir aber einfach nur abzählen. Am besten schreiben wir die ersten Schritte mal aus:

$$d_1 = 3\,, \quad d_2 = 3 \cdot 4\,, \quad d_2 = 3 \cdot 4 \cdot 4$$

Man sieht leicht, dass die Kante auf denen ein neues Dreieck konstruiert wurde, im nächsten Schritt, genau 4 neue kleine Dreiecke zum Vorschein bringt. Wir können also eine allgemeine Formel angeben:

$$d_n = 3 \cdot 4^{n-1} \ .$$

Nun können wir den Flächeninhalt F_n als eine Summe aufschreiben. Neben den Anfangsdreieck F_0 kommen in jedem Schritt die Flächeninhalte der weiteren Dreiecke hinzu, sodass wir schreiben können:

$$F_n = F_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j\,\frac{1}{2}k_j h_j \ .$$

Nun können wir die obigen Werte einsetzen und erhalten unsere gewünschte Reihendarstellung:

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{j=1}^{n} 3 \cdot 4^{j-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^j \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^j \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^j \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^j \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^j
\end{aligned}$$

Damit ist der Flächeninhalt der Koch'schen Schneeflocke, der ja nach Teil (a) existiert, durch den folgenden Reihenwert gegeben:

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^j \ .$$

Dies ist jedoch eine schöne geometrische Reihe, die wir schnell noch ausführlich berechnen wollen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^j \ = \ \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 \ = \ \frac{9}{5} - 1 \ = \ \frac{4}{5} \ .$$

Aus diesem Grund können wir nun leicht unser Endergebnis präsentieren:

$$\lim_{n\to\infty} F_n \ = \ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{5} \ = \ \sqrt{3}\,\frac{8}{20} \ = \ \sqrt{3}\,\frac{2}{5} \ .$$

2.10 Lösung über Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

In dieser Aufgabe wird ein sehr wichtiges mathematisches Konzept behandelt, nämlich das der Konvergenz. Wir kennen dies von Zahlenfolgen, jedoch ist es nun bei Funktionenfolgen nicht mehr von vornherein klar, was der Abstand zwischen zwei Funktionen sein soll. Je nachdem kann die Konvergenz einer

Funktionenfolge ganz verschiedene Dinge bezeichnen. Hier wird es um den Unterschied zwischen der sogenannten *punktweisen Konvergenz* und der *gleichmäßigen Konvergenz* von Funktionenfolgen gehen.

Zu (a): In diesem Aufgabenteil werden nun die zwei verschiedene Konvergenzmöglichkeiten von Funktionenfolgen vorgestellt. Der einfachste und direkt ersichtliche Begriff ist die punktweise Konvergenz: Wenn wir den Punkt x aus dem Definitionsbereich festhalten, so erhalten wir eine gewöhnliche reelle Zahlenfolge

$$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \ ,$$

von der wir natürlich von Konvergenz oder Divergenz sprechen können. Von punktweiser Konvergenz einer Funktionenfolge spricht man nun, wie der Name schon andeutet, wenn die obigen Folgen für jeden fest eingesetzten Punkt $x \in \mathbb{R}$ konvergente Folgen bilden. In diesem Fall kann man immer eine neue Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Grenzwerte definieren:

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Wir fassen das am besten mal kurz zusammen:

Definition. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion f, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad : \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ .$$

Nun kommen wir zur gleichmäßigen Konvergenz. Das Wort *gleichmäßig* besagt hier schon, dass man anstatt ein $x \in \mathbb{R}$ festzuhalten, etwas für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichsam haben möchte. Und genau das ist auch was passiert. Man möchte nicht für jedes x und eine beliebige Abweichung ε ein anderes $N = N_{\varepsilon,x}$ wählen können, wie es bei der punktweisen Konvergenz dort oben geschieht, sondern eine fest vorgegebene Fehlerschranke ε soll *gleichmäßig* auf alle $x \in \mathbb{R}$ wirksam sein. Das heißt man wählt das gleiche $N = N_\varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies drückt sich nun folgendermaßen aus:

Definition. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion f, wenn

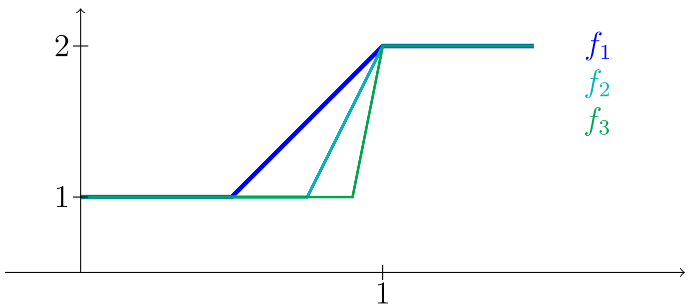
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \ .$$

Im Prinzip verschiebt sich nur der eine Quantor nach vorne, aber das verändert natürlich einiges. Wir können dies hier so interpretieren, dass wir den Abstand zwischen zwei Funktionen f und g durch den *größtmöglichen* Unterschied zwischen zwei Funktionswerten messen:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \ .$$

Die gleichmäßige Konvergenz liegt genau dann vor, wenn der so gemessene Abstand zwischen f_n und f gegen 0 konvergiert.

Wir bringen nun mal ein anschauliches Beispiel. Die Funktionenfolge ist als eine Folge von Graphen gezeichnet:



Man erkennt gut, dass jede Funktion der Funktionenfolge stetig ist und auch punktweise konvergiert. Dazu hält man einfach mal einen Punkt fest und schaut was passiert, wenn n wächst. Durch das wachsende n können wir jedoch einen „Sprung" erzeugen, sodass die Grenzfunktion nicht mehr stetig ist. Sie springt ja genau an der Stelle $x = 1$.

Wenn wir uns nun anschauen, wie groß der Abstand zwischen der Grenzfunktion und der Funktionenfolge im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz ist, so erkennen wir

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| = 1 \ ,$$

denn es gibt ja immer ein x, welches nur nahe genug an 1 gewählt werden muss, um diesen Abstand anzunähern. Demnach konvergiert die Funktionenfolge in diesem Bild wirklich nicht gleichmäßig, obwohl sie punktweise konvergiert. Die gleichmäßige Konvergenz ist also in der Tat ein stärkerer Begriff.

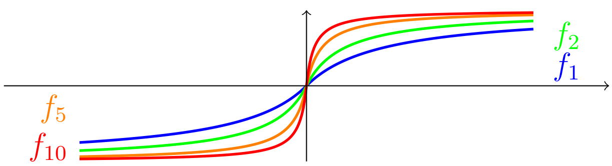
In Anbetracht des obigen Beispiels sollte man sich den folgenden Satz sehr gut einprägen:

Satz. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge von stetigen Funktionen. Wenn diese gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch diese Grenzfunktion stetig.

Zu (b): Nun beginnt erst die eigentliche Beispielaufgabe mit der Funktionenfolge

$$f_n(x) := \frac{nx}{1+|nx|} \ .$$

Die Graphen versuchen wir nun mal zu zeichnen:



Wir erkennen also auch hier, dass sich mit wachsendem n ein Sprung in der Grenzfunktion herausbildet.

Zu (c): Unsere Graphen suggerieren, dass alle Funktion f_n stetig sind. Dies möchten wir nun aber explizit zeigen. Als erstes stellen wir fest, dass wir die Funktion auch als

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx} \, , & x > 0 \\ 0 \, , & x = 0 \\ \frac{nx}{1-nx} \, , & x < 0 \end{cases}$$

schreiben können. Als elementare Zusammensetzung von stetigen Funktionen ist f_n also mit Sicherheit außerhalb der Null stetig. Dies weiß man von den bekannten Grenzwertsätzen über Folgen. Wir müssen demnach nur die Stelle $x = 0$ auf Stetigkeit überprüfen.

Wählen wir nun eine Nullfolge (x_k). Dann gilt:

$$f(x_k) = \frac{nx_k}{1 + |nx_k|} = x_k \cdot \frac{n}{1 + n\,|x_k|}\,.$$

Hier liegen nun zwei konvergente Folgen vor, sodass man die Limesregeln für Folgen verwenden darf. Es gilt also:

$$f(x_k) = x_k \cdot \frac{n}{1 + n\,|x_k|} \xrightarrow{k\to\infty} 0 = f(0)\,.$$

Jedes f_n ist demnach auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Bemerkung: Wenn man weiß und verwendet, dass die Betragsfunktion eine stetige Funktion ist, dann muss man sich auch nicht um den Sonderfall $x = 0$ kümmern und die Aufgabe ist sehr schnell erledigt.

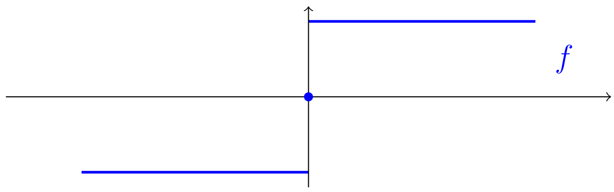
Zu (d): Nun kommen wir zum wesentlichen Teil der Aufgabe. Unsere gezeichnete Graphen von oben lassen vermuten, dass es eine (punktweise) Grenzfunktion gibt, aber diese müssen wir nun auch berechnen. Im Gegensatz zum vorherigen Beweis, ist n nun nicht mehr fest, sondern wird immer größer gewählt. Dabei können wir die Funktionenfolge wieder etwas umschreiben:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{\frac{1}{n}+x}\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ \frac{x}{\frac{1}{n}-x}\,, & x < 0 \end{cases}$$

Der Grenzwert von $1/n$ existiert und ihn kennen wir natürlich, sodass die

Grenzfunktion tatsächlich ebenso existiert Es ergibt sich dann sofort:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ -1\,, & x < 0 \end{cases}$$



Offensichtlich ist die Grenzfunktion unstetig an der Stelle $x = 0$. Aufgrund dessen kann aber auch keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen, denn der Satz aus (a) besagt, dass eine Folge von stetigen Funktionen, die gleichmäßig konvergiert, auch eine stetige Grenzfunktion hat.