Lösungsskizzen zu Blatt 13

A 13.1 (a) 1. Fall $L \in (0,2)$. Wähle $f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$

mit $$f(x) = \begin{pmatrix} (x_1-x_4)^2 + (x_2-x_5)^2 + (x_3-x_6)^2 - L^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $J_f(x)$ Rang 3 für alle $x \in M_L$ hat!

2. Fall $L = 2$. Wähle $f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$

mit $$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_4 \\ x_2 + x_5 \\ x_3 + x_6 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

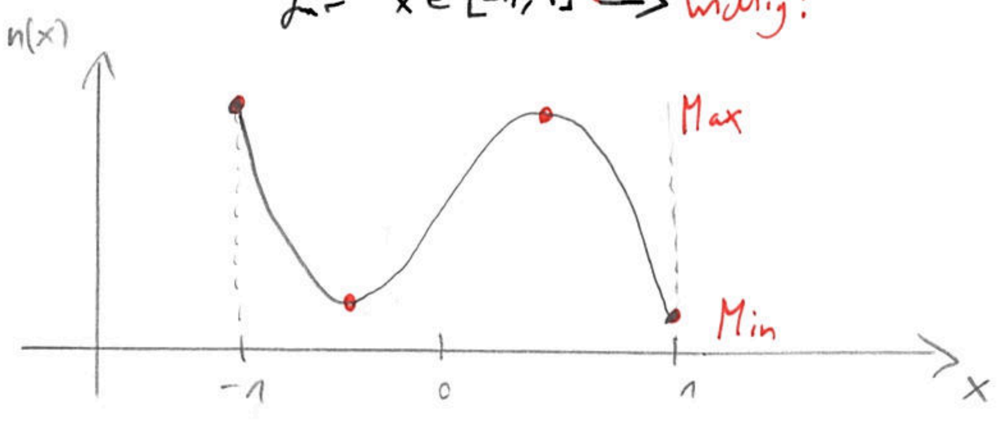
Zeige, dass $J_f(x)$ Rang 4 für alle $x \in M_L$ hat!

(b) Wähle $f: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$, $f(X) = \det(X) - 1$

und verwende die Leibnizformel!

A 13.2 (a) Setze Nebenbedingung $x^2+y^2-1=0$ ein und erhalte die Funktion $n(x) = 3x(1-x^2) - x^3 + 4x^2 + 4(1-x^2) = 3x - 4x^3 + 4$

für $x \in [-1,1] \longrightarrow$ wichtig!



Kritische Punkte sind $x_1 = \frac{1}{2}$ mit $n(x_1) = 5$ lok. Max (2. Ableitung!)

$x_2 = -\frac{1}{2}$ mit $n(x_2) = 3$ lok. Min (")

An den Rändern erhalten wir $n(1) = 3$, $n(-1) = 5$.

Die Ableitung $n'(1)$, $n'(-1)$ liefert uns auch hier lokale Extrema.

Alle Extremstellen lauten für f dann:

$$(-1,0), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (1,0).$$

(b) Lagrange-Multiplikatoren mit NB $F(x,y) = x^2 - y^2 - 1$ liefert

Gleichungssystem:

$$3y^2 - 3x^2 + 8x = \lambda 2x \quad (\mathrm{I})$$
$$6xy + 8y = \lambda 2y \quad (\mathrm{II})$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\mathrm{III})$$

1. Fall $x = 0 \overset{(\mathrm{I})}{\Rightarrow} y = 0 \overset{(\mathrm{III})}{\Rightarrow}$ keine Lösung

2. Fall $x \neq 0$ und $y = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \pm 1$, $\lambda = \frac{5}{2} \vee \lambda = \frac{11}{2}$

3. Fall $x \neq 0$ und $y \neq 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_\pm = \pm \frac{3}{2} + 4$

Die Extremstellen sind die gleichen wie bei (a).

13.3

(1) Inneres: gewöhnliches Extremwertproblem: Kritischer Punkt $(0,0,0)$

Da $f(0,0,0) = 0$ weder globales Max. noch Minimum.

(2) Rand: Nebenbedingung $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4 - 16$ führt auf:

$$x^2+y^2+z^4 = 16 \qquad (\mathrm{I})$$

$$2x = \lambda 2x \qquad (\mathrm{II})$$

$$-2y = \lambda 2y \qquad (\mathrm{III})$$

$$2z^3 = \lambda 4 z^3 \qquad (\mathrm{IV})$$

Lösen des Gleichungssystems führt auf:

$$p_{1/2} = \begin{pmatrix} \pm 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_{3/4} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_{5/6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$$

mit den Funktionswerten:

$$f(p_{1/2}) = 16, \quad f(p_{3/4}) = -16, \quad f(p_{5/6}) = 8.$$

Daher liegt bei $p_{1/2}$ je ein Maximum von 16 vor.

" " " $p_{3/4}$ " " Minimum von -16 vor.