Lösung

(a) **Bel:** $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ Banachraum

Bew: $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ ist Norm ✓

Wähle nun eine Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$

Offensichtlich gilt:

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{C}^1}$$
$$\|f_n' - f_m'\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{C}^1}$$

Also sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $(\mathcal{C}^0, \|\cdot\|_\infty)$.

Da $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig, siehe Vorlesung, gibt es Grenzwerte $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ mit:

$$\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0 \quad , \quad \|f_n' - g\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Zu zeigen bleibt: $f \in \mathcal{C}^1$ und $f' = g$

Beweis davon:

Info: [Wir können ausnutzen, dass (gleichmäßige Konvergenz!)

$$\left| \int_a^x f_n'(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|\,dt$$
$$\leq (x-a)\cdot \|f_n' - g\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad , a\in[0,1].$$
]

Nun schreiben wir die Funktion f_n mit dem HDI um:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

$\swarrow n\to\infty$ $\quad\downarrow n\to\infty$ $\quad\downarrow n\to\infty$ (s. oben) glm. Konvergenz

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

Da g stetig ist, wissen wir:

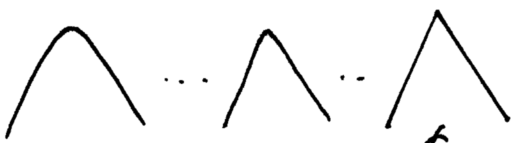
f stetig differenzierbar und $f' = g$.

Demnach ist $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ und $\|f_n - f\|_{\mathcal{C}^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\square$

(b)

Bel: $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum

Bew: Konstruiere Funktionenfolge:

z.B.: 

stetig diff'bar $\xrightarrow[n\to\infty]{}$ $\notin \mathcal{C}^1$

Explizites Beispiel:

$$f_n(t) := \left(\left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{n} \right)^{1/2}$$

Klar $f_n \in \mathcal{C}^1([0,1])$.

Punktweiser Grenzwert: $f(t) = |t - \tfrac{1}{2}| \notin \mathcal{C}^1$.

Zeige die gleichmäßige Konvergenz:

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| \left(\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{n} \right)^{1/2} - \left(\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2 \right)^{1/2} \right|$$

$$= \left(\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{n} \right)^{1/2} - \left(\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^2 \right)^{1/2}$$

$\left(\text{Für } b \geq a \geq 0: \; 0 \leq \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a}\right)$

$$\overset{\text{s. rechts}}{\leq} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} \qquad \forall t \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

C.F. konvergiert nicht $\Rightarrow$ nicht vollständig $\square$