(d)

Beh: $\bar{A} = \{x \in X \mid \exists (a_n) \subset A \text{ mit } a_n \xrightarrow{n\to\infty} x\}$

Bew: Verwende (c) indem wir den metrischen Raum

$(\bar{A}, d|_{\bar{A}\times\bar{A}})$ betrachten, d.h.:

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) bedeutet $\bar{A} = \bar{A}$ $\Leftrightarrow$ Jedes $x \in \bar{A}$ ist GW einer Folge in A.

$\square$

Beh: $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

Bew: $\bar{A} \subset \bar{\bar{A}}$ ist per definitionem klar. Zeige also: $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$.

Betrachte also $x \in \bar{\bar{A}}$. Diese x ist Grenzwert einer Folge $(x_n) \subseteq \bar{A}$. Dieses $x_n \in \bar{A}$ ist aber wieder Grenzwert einer Folge $(a_m) \subseteq A$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $(x_n) \subseteq \bar{A}$ Folge mit GW $x \in \bar{\bar{A}}$.

Wähle für alle $x_n \in \bar{A}$ ein $\tilde{x}_n \in A$ mit $d(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Und wähle N so groß, dass $\forall n \geq N$ $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann gilt: $d(x, \tilde{x}_n) \leq d(x, x_n) + d(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Also gibt es eine Folge $(\tilde{x}_n) \subseteq A$ mit $\tilde{x}_n \to x$.

Also auch $\bar{\bar{A}} \subset \bar{A}$ $\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Beh: $\bar{A}$ kleinste abg. Menge mit $A \subset \bar{A}$

Bew: Nach (a) ist $\bar{A}$ abgeschlossen, und auch die kleinst mögliche, da $\bar{A} = \{x \in X \mid \exists (a_n) \subset \bar{A}, a_n \to x\}$ gilt $\square$