(b) Beh: $(x_n)$ C.F mit HP $x \Rightarrow x_n$ konvergent gegen $x$

Bew: C.F bedeutet: $\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{N \in \mathbb{N}} \; \forall_{n,m \geq N} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad (1)$

$x$ HP bedeutet: $\forall_{\varepsilon>0}$ unendlich viele Folgenglieder in $B_\varepsilon(x)$. (2)

Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle nun $N$ nach (1) so groß, dass $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n,m \geq N$ gilt.

Wählen nun $M \geq N$ so, dass $x_M \in B_{\varepsilon/2}(x)$ nach (2).

Dann gilt:

$$d(x, x_n) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x, x_M) + d(x_M, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und zwar für alle $n \geq N \Rightarrow x_n \to x$ $\square$

(c) Drei Richtungen zeigen: (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Wir setzen $\overline{A} = X$ voraus, das bedeutet jeder Punkt $x \in X$ ist ein Berührpunkt von $A$.

[ $x$ BP von $A$ $:\Leftrightarrow$ $\forall$ Umg. $U$ von $x$ gilt $U \cap A \neq \emptyset$ ]

Das heißt also insbesondere: Für alle $x \in X$, $\varepsilon > 0$ gilt

$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \Rightarrow$ (ii) ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wir nehmen nun an, dass für alle $x \in X, \varepsilon > 0$
$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Also insbesondere für alle $n \in \mathbb{N}$:

$B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$. Wähle Folge $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$
aus. (abz. Auswahlaxiom).

Dann ist $(x_n) \subseteq A$ mit GW $x \in X$. $\Rightarrow$ (iii) ✓

(iii) $\Rightarrow$ (i)

---

Für ein $x \in X$ existiert eine Folge $(a_n) \subseteq A$ mit
$a_n \to x$ $\left( \forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{N \in \mathbb{N}} \; \forall_{n, n \geq N} \quad d(a_n, x) < \varepsilon \right)$.

Dies bedeutet aber, dass für alle $\varepsilon > 0$:
$B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

Da jede Umgebung $U$ von $x$ auch eine $\varepsilon$-Kugel enthalten muss (per definitionem von "Umgebung"), erhalten wir:

Für alle Umg. $U$ von $x$ gilt $U \cap A \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ (i) $\square$