Lösung:

(a)

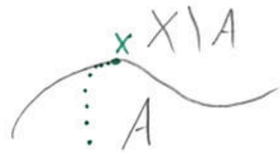
Beh: A abgeschlossen $\iff \left(\forall_{(x_n) \subseteq A} \;\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A \right)$

Bew: ($\Rightarrow$) Es sei nun $(x_n) \subseteq A$ konvergente Folge mit

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X \setminus A .$$

Die Konvergenz bedeutet:

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{N\in\mathbb{N}} \; \forall_{n\geq N} \quad d(x_n, x) < \varepsilon$$



Da aber alle x_n in A liegen, heißt dies

$$\forall_{\varepsilon>0} \; B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset . \quad \left(\text{bzw. } \forall_{\varepsilon>0} \; B_\varepsilon(x) \not\subset X\setminus A\right).$$

Also ist $X\setminus A$ nicht offen $\Rightarrow$ A nicht abgeschlossen.

[Die Kontraposition liefert die Richtung ($\Rightarrow$)] ✓

($\Leftarrow$) Es sei nun $X\setminus A$ nicht offen, d.h. es gibt ein $x \in X\setminus A$ mit:

$$\forall_{\varepsilon>0} \; B_\varepsilon(x) \not\subset X\setminus A .$$

(abzählb. Auswahlaxiom)

Wähle für jedes $n\in\mathbb{N}$ ein $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$.

Demnach konvergiert die Folge (x_n) gegen $x \in A^c$.

[Kontraposition zeigt die Richtung ($\Leftarrow$)] $\square$