Lösung:

(a) Eine Topologie, in welcher $\{1,2\}$ und $\{2,3\}$ offen sind, muss auch den Schnitt enthalten: $\{2\}$.

Demnach: $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}\}$ ist kleinste Topologie

$$\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

$= P(X)$ ist die größte Topologie.

Dazwischen können wir nun schauen:

$\mathcal{O}_3 = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, \underbrace{\{1\}}_{\text{hinzunehmen}}\}$ ist Topologie!

$\mathcal{O}_4 = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, \underbrace{\{3\}}_{\text{hinzunehmen}}\}$ ist Topologie.

$\mathcal{O}_5 = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, \underbrace{\{1,3\}}_{\text{hinzunehmen}}, \{1\}, \{3\}\}$

Schnitt

$= \mathcal{O}_2 = P(X)$

Wir haben also vier verschiedene Topologien gefunden.

(b) Kleinste Topologie, die $\{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}$ enthält.

Vereinigungen: $\{a,b,c\}$, Schnitte: nichts neues.

$\mathcal{O} := \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ ist die gesuchte Topologie.

Nun bestimmen wir die Berührpunkte von $\{b\}$ und $\{a,b\}$.

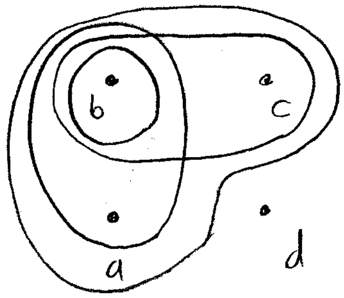
Dazu schreiben wir die nicht-trivialen offenen Umgebungen aller Punkte auf:

off. Umg. von a: $\{a,b\}$, $\{a,b,c\}$

" " b: $\{b\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$

" " c: $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$

" " d: X



$$\overline{\{b\}} = \{a,b,c,d\} = X$$

$$\overline{\{a,b\}} = X$$

(c) Die abgeschlossenen Mengen sind die Komplemente der offenen:

$$\mathcal{A} := \{\emptyset, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$$

Leicht zu sehen $\{b\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Weiterhin $\{a,c,d,e\}$ ist nicht abgeschlossen $\Rightarrow \overline{\{a,c,d,e\}} = X$.

(d) Die abgeschlossenen Mengen sind:

$$\mathcal{A} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Demnach gilt: $\overline{(0,1)} = (-\infty, 1]$