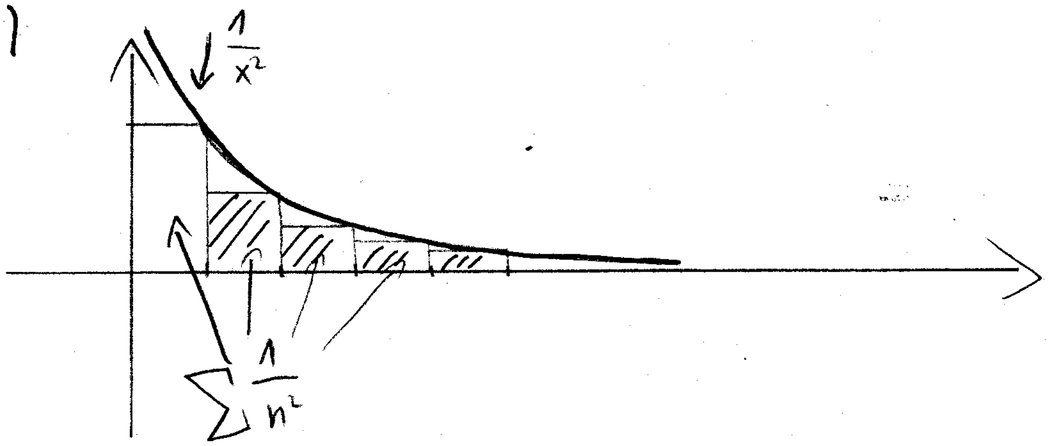
Lösung

(a)



Wähle die Funktion $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Dann gilt $f(n) = \frac{1}{n^2}$. f ist monoton fallend und es gilt:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = -\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{1}\right] = \underline{1}$$

Demnach gilt mit Untersummenbeschreibung (bzw. Satz 9.42):

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \le \int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx \le 1 \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

$\left[S_N := \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \right.$ monoton wachsend + beschränkt $\Rightarrow$ konvergiert$\left.\right]$

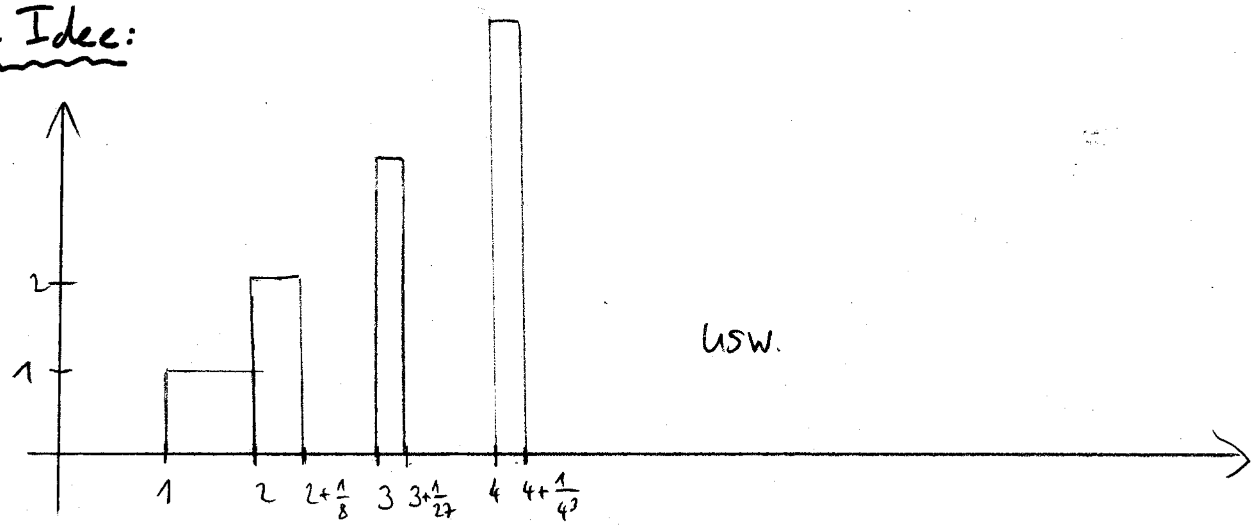
Selbstverständlich konvergiert dann auch

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} \qquad \square$$

(b)

Die Idee ist, die Funktion mit der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ in Verbindung zu bringen.

1. Idee:



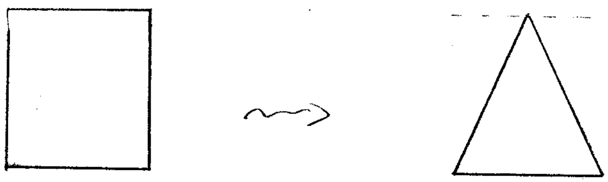
$$f(x) := \begin{cases} n & , \text{ für } x \in \left(n, n+\frac{1}{n^3}\right] \ , n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Funktion wächst immer weiter, aber die Intervalle auf der X-Achse werden immer kleiner. Dann gilt nämlich:

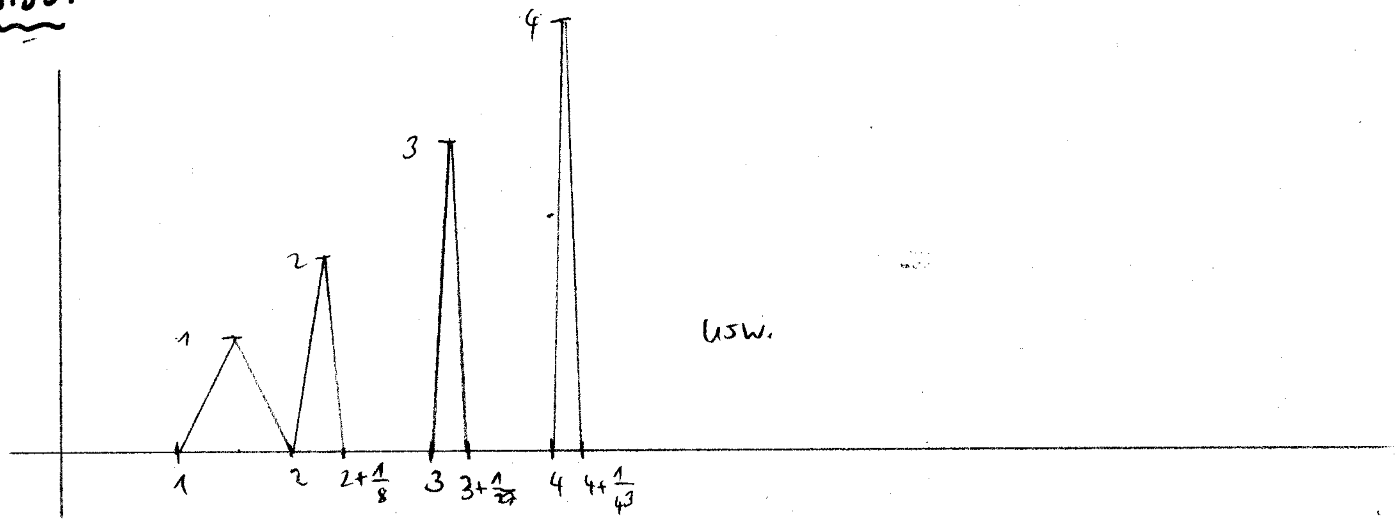
$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n^3} - n\right) \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty .$$

Die Funktion ist allerdings nicht stetig, aber wir können auch Dreiecke wählen:

2. Idee:

Anstatt 

Also:



$$g(x) := \begin{cases} n, & x = n + \frac{1}{2n^3}, \; n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \notin [n, n + \frac{1}{n^3}], \; n \in \mathbb{N} \\ \text{Geraden}, & \text{sonst} \end{cases}$$

so, dass g stetig wird.

Nach Majorantenkriterium (Satz 9.39) und da

$|g(x)| \leq f(x)$ für alle $x \in [0, \infty)$ gilt, wissen wir

$\int_0^\infty g(x)\, dx$ existiert endlich. $\square$