Lösung:

Allgemein: Für positive Funktion $p : (a,\infty) \to \mathbb{R}^+$ bedeutet

$\limsup_{x \to x_0} p(x) < \infty$, dass es $b \in \mathbb{R}$, $C > 0$

gibt mit $p(x) \leq C \quad \forall x \in (x_0 - b, x_0 + b)$.

bzw. einseitig, wenn nötig!

(a)

(i) Da $F \in O(f)$, $G \in O(g)$ gibt es also $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ und $C_1, C_2 > 0$ so, dass

$$\left| \frac{F(x)}{f(x)} \right| \leq C_1 \quad \forall x \in (x_0 - b_1, x_0 + b_1) \quad \text{und}$$

$$\left| \frac{G(x)}{g(x)} \right| \leq C_2 \quad \forall x \in (x_0 - b_2, x_0 + b_2)$$

Setze $b_3 := \min\{b_2, b_1\}$ und $C_3 := C_1 + C_2$. Dann gilt:

$$\left| \frac{F(x) + G(x)}{|f(x)| + |g(x)|} \right| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left| \frac{F(x)}{|f(x)| + \underbrace{|g(x)|}_{\geq 0}} \right| + \left| \frac{G(x)}{\underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} + |g(x)|} \right|$$

$$\leq \left| \frac{F(x)}{f(x)} \right| + \left| \frac{G(x)}{g(x)} \right| \leq C_1 + C_2 = C_3$$

für alle $x \in (x_0 - b_3, x_0 + b_3)$

$$\Rightarrow F + G = O(|f| + |g|), \quad (x \to x_0)$$

(ii) b_1, b_2, C_1, C_2 wie vorhin. Setze $b_4 := \min\{b_1, b_2\}$ und $C_4 := C_1 \cdot C_2$. Dann gilt:

$$\left|\frac{F(x)\cdot G(x)}{f(x)\cdot g(x)}\right| = \left|\frac{F(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{G(x)}{g(x)}\right| \leq C_4$$

für alle $x \in (x_0 - b_4, x_0 + b_4)$ $\Rightarrow$ $F \cdot G = O(f \cdot g)$ $(x \to x_0)$.

(iii) analog

(iv) Für h gilt: $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{b>0}{\exists}\ \underset{x\in(x_0-b, x_0+b)}{\forall}\ \left|\frac{h(x)}{f(x)}\right| < \varepsilon$

Dann gilt:

$$\left|\frac{h(x)\, G(x)}{f(x)\, g(x)}\right| \leq \left|\frac{h(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{G(x)}{g(x)}\right| \leq C_2 \cdot \varepsilon$$

$\forall x \in (x_0 - d, x_0 + d)$ mit $d := \min\{b, b_2\}$.

Also $h \cdot G \in o(f \cdot g)$ $\square$

(b) Behauptung ist falsch, denn $f(x) = x^{k+\frac{1}{2}}$ erfüllt:

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x^k}\right| = \lim_{x\to 0} \left|x^{\frac{1}{2}}\right| = 0 \quad \text{und} \quad \limsup_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{x^{k+1}}\right| = \infty \checkmark$$

(c) Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{f(x)}{1}\right| = \lim\limits_{x\to 0} |f(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit}}}{=} 0 \Rightarrow$ Behauptung $\square$

(d) <u>Beh:</u> $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$

<u>Bew:</u> Verwende, dass $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ mon. wachsend

und $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ mon. fallend ist.

Leicht zu zeigen (s. Analysis I). Grenzwert beider Folgen ist e. Also gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}} \right| \leq \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} \right|$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 = e < \infty \qquad \square$$

<u>Beh:</u> $f = \mathcal{O}(n^n) \iff f = \mathcal{O}(n!) \quad (n \to \infty)$ ist falsch!

<u>Bew:</u> Wähle einfach $f(n) = n^n$. Dann gilt $f = \mathcal{O}(n^n)$, aber

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{n^n}{n!} \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot n \cdots n}{n \cdot \underbrace{(n-1) \cdots 1}_{\leq n}} \right| \geq \limsup_{n\to\infty} n = \underline{\infty}$$