Lösung:

Punktweiser Grenzwert:

Berechne für jedes $x \in [0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$:

Für $x=0$ gilt $g_n(x)=0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $x \in (0,1]$ gilt:

$$|g_n(x)| \leq n^2 e^{-nx} = n^2 \frac{1}{e^{nx}} = n^2 \frac{1}{1+nx+\frac{n^2x^2}{2}+\frac{n^3x^3}{3!}+\dots}$$

$$\leq n^2 \cdot \frac{1}{\frac{n^3x^3}{3!}} \leq \frac{3!}{x^3} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{0}$$

Demnach $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1].}$

Das heißt auch $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = 0$

Andererseits gilt:

$$\int_0^1 g_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x e^{-nx}\,dx \overset{P.I.}{=} n^2 \cdot \left( -\frac{x}{n} e^{-nx} \Big|_0^1 + \int \frac{1}{n} e^{-nx} dx \right)$$

$$= n^2 \left( \frac{-1}{n} e^{-n} + \left(-\frac{1}{n^2}\right) e^{-nx} \Big|_0^1 \right) = 1 - e^{-n} - n e^{-n}$$

Also:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim g_n(x)\,dx \qquad \square$$