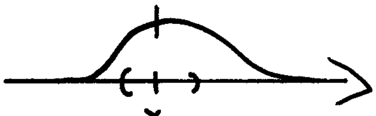
Lösung:

(a) Wähle $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) > 0$. Dann gibt es aufgrund der Stetigkeit ein $\delta > 0$ mit

$$(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b] =: I \quad , \; f(x) > 0 \quad \forall x \in I$$



⌈ Folgt z.B. direkt aus ε-δ-Stetigkeit: ⌉

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{x\in[a,b]}{\forall} \quad |x-x_0|<\delta \implies \underbrace{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}_{(*)}$$

(*) heißt $\quad f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$

Wähle $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$ und δ nach Stetigkeit. Dann gilt

$\forall x\in I \quad \varepsilon < f(x) < 3\varepsilon$ also $f(x) > 0$! ⌋

Nun gilt mit Sicherheit für $J := \left[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}\right]\cap[a,b]$:

$$\inf_{x\in J} f(x) =: q > 0$$

Nehmen wir irgendeine Zerlegung Z, die das Intervall

J enthält, so erhalten wir: (da $U_Z \geq 0$ gilt)

$$U_Z \geq \delta \cdot \inf_{x \in J} f(x) = \delta \cdot q > 0$$

Dann folgt, aber $0 < U_Z \leq \int_a^b f(x)\, dx$.

In Kontraposition folgt die Behauptung! $\square$

(b) <u>Annahme:</u> Es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $\underset{(1.\text{ Fall})}{g(x_0) > 0}$ oder $\underset{(2.\text{ Fall})}{g(x_0) < 0}$.

Dann gibt es mit dem gleichen Stetigkeitsargument wie in (a) ein abgeschlossenes Intervall $[c,d] \ni x_0$ mit $c \neq d$ so, dass

① $g(x) > 0 \quad \forall x \in [c,d]$ oder

② $g(x) < 0 \quad \forall x \in [c,d]$

Im 1. Fall erfüllt $g|_{[c,d]}$ die Bedingungen in (a), sodass $g(x_0) = 0$ gilt $\lightning$

Im 2. Fall erfüllt $-g|_{[c,d]}$ die Bedingungen in (a), sodass $-g(x_0) = 0$ gilt $\lightning$

Insgesamt also: $g(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ $\square$