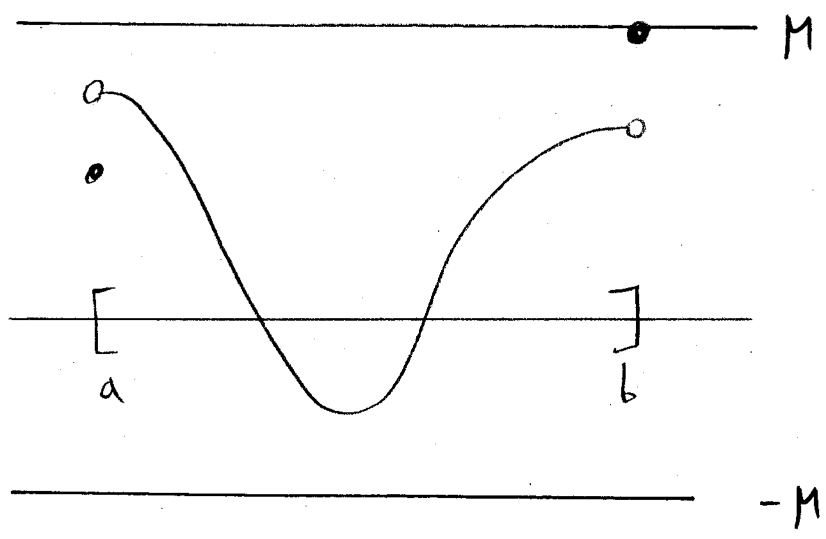
Lösung zu A 6.3

Verwende Riemann'sches Integrabilitätskriterium (Satz 9.5).

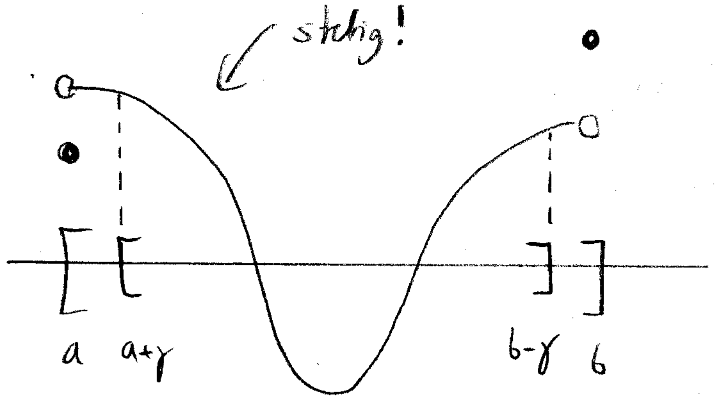
Es sei $\varepsilon > 0$. Setze $M := \|f\|_\infty$ als obere Schranke fest.

$-M$ ist dann eine untere Schranke:



Damit wir verwenden können, dass stetige Funktionen integrierbar sind, müssen wir f einschränken:

Setze $\gamma := \frac{\varepsilon}{8M}$ und betrachte $g : [a+\gamma, b-\gamma] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$. g ist stetig auf dem abg. Intervall!



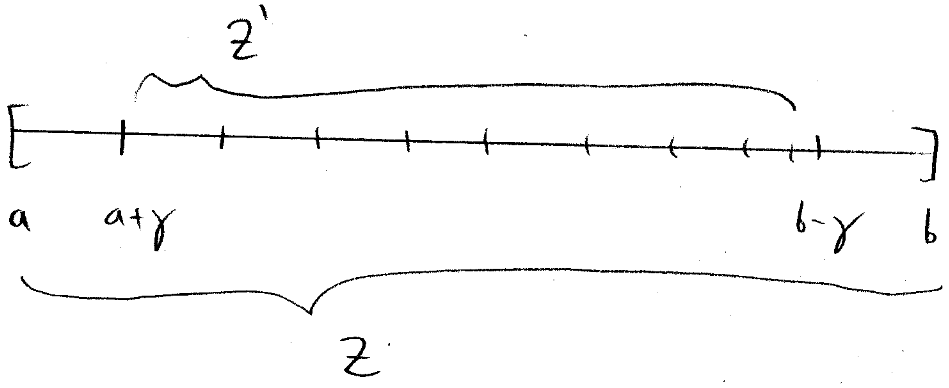
Es gibt also eine Zerlegung Z' des Intervall $[a+\gamma, b-\gamma]$, für die

$$O_{Z'}(g) - U_{Z'}(g) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{gilt.}$$

Fügen wir die Intervallgrenzen hinzu erhalten wir eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$:

$$Z': \quad a+\gamma = x_0' < x_1' < \ldots < x_{N-1}' < x_N' = b-\gamma$$

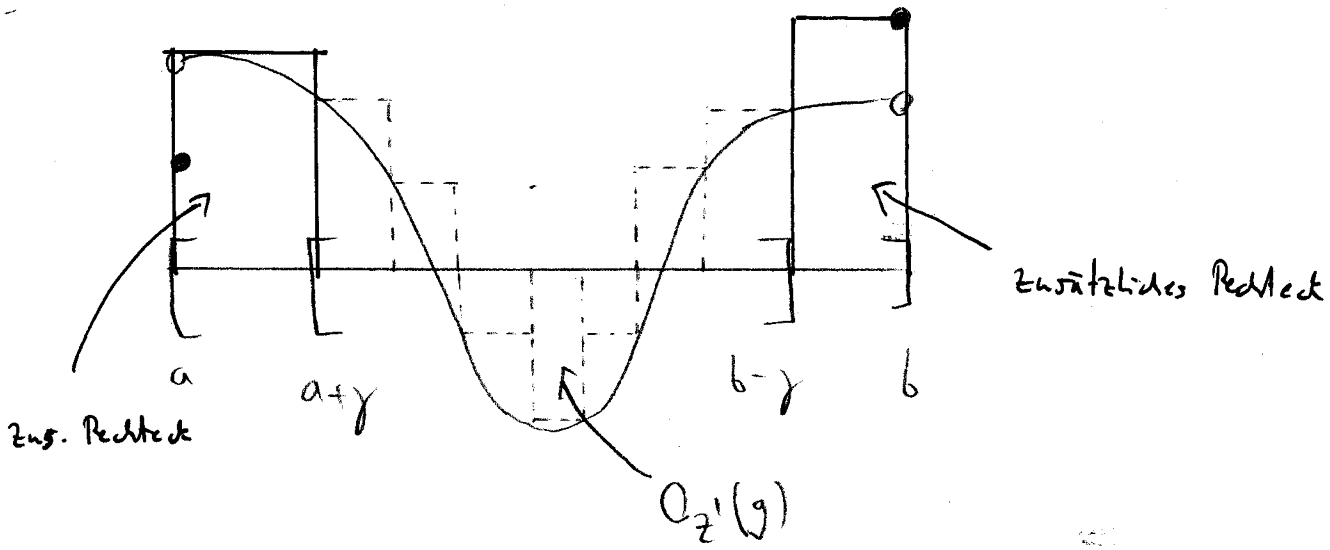
$$Z: \quad a = x_0 < x_0' < x_1' < \ldots < x_{N-1}' < x_N' < x_N = b$$



Für das Integral kommen also nur zwei Rechtecke links und rechts für Obersumme bzw. Untersumme hinzu:

$$O_Z(f) = \left(\gamma \cdot \sup_{x\in[a,a+\gamma]} f(x)\right) + O_{Z'}(g) + \left(\gamma \cdot \sup_{x\in[b-\gamma,b]} f(x)\right)$$

$$U_Z(f) = \left(\gamma \cdot \inf_{x\in[a,a+\gamma]} f(x)\right) + U_{Z'}(g) + \left(\gamma \cdot \inf_{x\in[b-\gamma,b]} f(x)\right)$$



Also insgesamt:

$$O_z(f) - O_z(g) \le \overbrace{\left[\gamma \cdot \sup f\right]}^{\le \gamma \cdot M} + \left[\gamma \cdot \sup f\right] \overbrace{- \left[\gamma \cdot \inf f\right]}^{\le \gamma \cdot M}$$

$$- \left[\gamma \cdot \inf f\right] + \left(O_{z'}(g) - U_{z'}(g)\right)$$

$$\le 4 \cdot \gamma M + \left(O_{z'}(g) - U_{z'}(g)\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.