Lösung zur Aufgabe 5.2

Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nun gilt:

$$A^*A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Eigenwerte sind: $\sigma(A^*A) = \{5, 1, 0\}$.
Unitäres Diagonalisieren mit

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

bringt:

$$U^*(A^*A)U \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deswegen setzen wir:

$$D := \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \mu_1 = \sqrt{5}\,, \mu_2 = 1$$

Dann ergibt sich $W = (w_1, w_2)$ mit

$$w_i := \frac{1}{\mu_i} AU^* e_i$$

Das heißt:

$$W = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insgesamt:

$$A = WDU = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$