Lösung: $A, B \in \mathrm{Mat}(N \times N, \mathbb{K})$

(a) Beh: $e^A e^B \neq e^{A+B}$ i.A.

Bew: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 2$

Ebenso $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 2$

Also: $e^A = \mathbb{1} + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$e^B = \mathbb{1} + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$e^B e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\#$

Wenn aber $e^A e^B = e^{A+B}$ gelten würde, dann auch

$e^A e^B = e^{A+B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Addition ist kommutativ}}}{=} e^{B+A} = e^B e^A$

(b)

Die Cauchy-Produktformel lautet:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Diese gilt auch für Matrizen, wenn die Reihen absolut konvergieren (Dazu muss man $Mat(N \times N, \mathbb{K})$ mit einer Norm ausrüsten! Dies ist immer möglich und dann konvergiert $\sum \frac{1}{n!} A^n$ absolut)

$$e^A e^B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} A^k B^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n$$

Binomischer Lehrsatz! Für diesen benötigen wir unbedingt, dass A und B kommutieren!

$$= e^{A+B} \quad \checkmark$$

(c) <u>Beh:</u> $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

<u>Bew:</u>

Wir wissen, dass A und $-A$ kommutieren und können Teil (b) anwenden:

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = \mathbb{1}$$

$$e^{-A} \cdot e^A = e^{A-A} = e^0 = \mathbb{1}$$

Dies bedeutet: e^A invertierbar und besitzt die Inverse e^{-A}.