Lösung

(a) P orth. Projektion $\Leftrightarrow$ $P^2 = P$ und $P^* = P$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ orthonormiert Familie $(e_k)_{k=1..M}$ mit $Pv = \sum_{k=1}^{M} \langle e_k, v\rangle e_k$

Besselsche Ungleichung gilt für jede orthonormierte Familie:

$$\langle v, Pv\rangle = \langle v, \sum_{k=1}^{M} \langle e_k, v\rangle e_k \rangle = \sum_{k=1}^{M} \langle v, e_k\rangle \langle e_k, v\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \overline{\langle e_k, v\rangle} \langle e_k, v\rangle = \sum_{k=1}^{M} |\langle e_k, v\rangle|^2$$

$$\overset{\text{Bessel}}{\leq} \|v\|^2 = \underline{\langle v, v\rangle}$$

Also: $\langle v,v\rangle \geq \langle v, Pv\rangle \quad \forall v \in V.$

(b) <u>Beh:</u> $Q := P_u P_w$ orth. Projektion $\Leftrightarrow$ $P_w P_u = P_u P_w$

<u>Bew:</u> ($\Rightarrow$) $\forall v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$\langle v_1, P_w P_u v_2\rangle = \langle P_w v_1, P_u v_2\rangle = \langle P_u P_w v_1, v_2\rangle$$

$$= \langle Q v_1, v_2\rangle = \langle v_1, Q v_2\rangle \quad (Q \text{ Projektion})$$

$$= \langle v_1, P_u P_w v_2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle v_1, (P_W P_U - P_W P_U)\, v_2 \rangle \qquad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$\Rightarrow \quad P_W P_U - P_W P_U = 0$$ ✓

($\Leftarrow$) zeige: $Q^2 = Q$, $Q^* = Q$

$$Q^2 = P_U P_W P_U P_W = P_U^2 P_W^2 = P_U P_W = Q$$

$$Q^* = (P_U P_W)^* = P_W^* P_U^* = P_W P_U = P_U P_W = Q$$

$\Rightarrow$ Q orthogonale Projektion. ✓

Es bleibt zu zeigen: $\mathrm{Ran}(Q) = U \cap W$

($\subset$) $v \in \mathrm{Ran}(Q) \Rightarrow P_U P_W v = v \Rightarrow v \in \mathrm{Ran}(P_U) = U$

und $v \in \mathrm{Ran}(Q) \Rightarrow \underset{\displaystyle P_W P_U v}{\overset{\shortparallel}{P_U P_W v}} = v \Rightarrow v \in \mathrm{Ran}(P_W) = W$

Also $v \in \mathrm{Ran}(Q) \Rightarrow v \in U \cap W$. ✓

($\supset$) Sei $v \in U \cap W \Rightarrow Qv = P_U P_W v = P_U v = v$

Also $v \in \mathrm{Ran}(Q)$. ✓

$\square$

(c) <u>Beh:</u> $P_U P_W = 0 \iff U, W$ orthogonal

<u>Bew:</u> $P_U P_W = 0 \iff \mathrm{Ran}(P_W) \subseteq \mathrm{Bild}(P_U)^{\perp}$

$$\iff W \subseteq U^{\perp}$$

$$\iff W \perp U$$

$$\left(\iff U \subseteq W^{\perp} \iff P_W P_U = 0 \right)$$

(d) <u>Beh:</u> $R := P_U + P_W$ ist orth. Projektion $\iff U \perp W$

<u>Bew:</u> ($\Leftarrow$) zeige: $R^2 = R$, $R^* = R$.

$$R^2 = (P_U + P_W)^2 = P_U^2 + P_W^2 + \underbrace{P_U P_W}_{=0} + \underbrace{P_{WU}}_{=0} = P_U + P_W$$

nach (c)

$$= R$$

$$R^* = P_U^* + P_W^* = P_U + P_W = R \qquad \checkmark$$

($\Rightarrow$) Da R orthogonale Projektion, können wir (a) verwenden:

$$\langle v, v \rangle \geq \langle v, Qv \rangle = \langle v, P_U v \rangle + \langle v, P_W v \rangle$$

Setze $v = P_U \tilde{v}$ für $\tilde{v} \in V$:

ergänzen

$$\langle P_U \tilde{v}, P_U \tilde{v} \rangle \geq \langle P_U \tilde{v}, P_U \tilde{v} \rangle + \langle P_U \tilde{v}, P_W^2 P_U \tilde{v} \rangle$$

$$\Rightarrow 0 \geq \langle P_W P_U \tilde{v}, P_W P_U \tilde{v} \rangle \quad \Rightarrow P_W P_U = 0$$

$$\overset{(c)}{\Rightarrow} U \perp W$$

Es bleibt zu zeigen: $\operatorname{Ran}(R) = U \oplus W$

$(\subset)$ $v \in \operatorname{Ran}(R) \Rightarrow Rv = v$

$$\Rightarrow \underbrace{P_U v}_{\in U} + \underbrace{P_W v}_{\in W} = v$$

D.h $v = u_1 + w_1$ für ein $u_1 \in U$, $w_1 \in W$

$\Rightarrow v \in U \oplus W$, denn $U \perp W$

$(\supset)$ $v \in U \oplus W \Rightarrow v = u_2 + w_2$ für ein $u_2 \in U, w_2 \in W$

von links mit P_U $\Rightarrow$ von links mit P_W $\begin{cases} P_U v = P_U(u_2 + w_2) = u_2 \\ P_W v = P_W(u_2 + w_2) = w_2 \end{cases}$

$\Rightarrow v = P_U v + P_W v = (P_U + P_W) v = Rv$ ✓