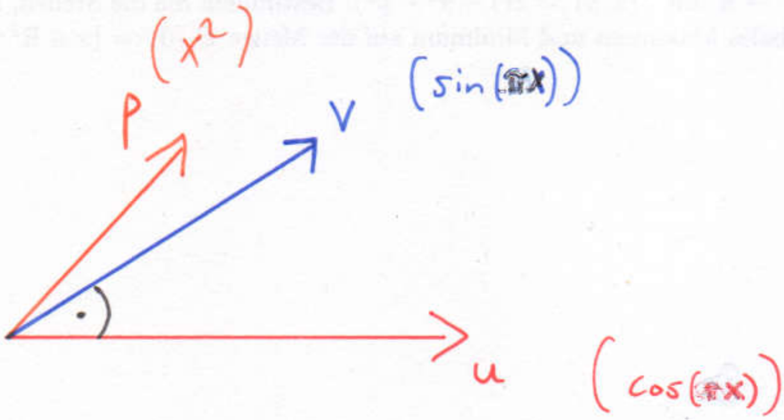
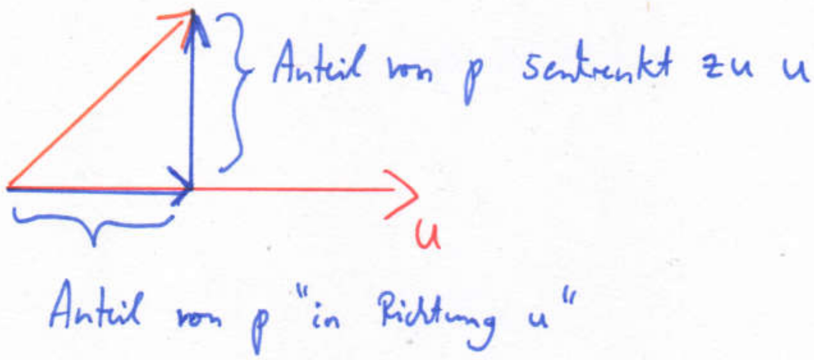
Lösung zu 3.2 (d)

Vorstellung



Zu berechnen sind die Projektionen (orthogonale Projektionen!) des Vektors p auf die eindimensionalen Unterräume, d.h.:



Die Projektion auf einen Einheitsvektor ist immer gegeben durch:

$$\langle u | p \rangle u$$

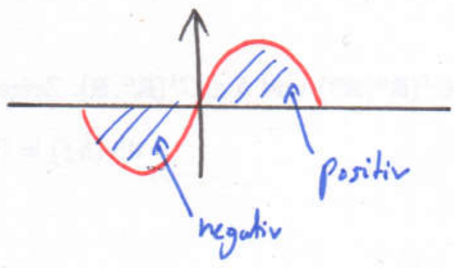
Zu berechnen sind also $\langle u|p\rangle u$ und $\langle v|p\rangle v$.

Also:

$$\langle v|p\rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{\sin(\pi x)}_{\text{ungerade Funktion}} \underbrace{x^2}_{\text{gerade Funktion}} \, dx = 0$$

Hier brauchen wir das Integral nicht auszurechnen,

da anschaulich gilt:



Das andere Integral müssen wir aber lösen:

$$\langle u | p \rangle = \int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\, x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(y)\, y^2 \, dy \quad (\text{mit Substitution } y = \pi x)$$

$$= -\frac{4}{\pi^2}$$

(mit partieller Integration erhält man eine Stammfunktion. Bitte selbst ausführen!)

Insgesamt gilt also:

Projektion auf U $= \underline{-\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)}$

Projektion auf V $= \underline{0}$