Lösung 2.5

1. Fall: $N = M$

- Wenn A invertierbar ist:

$$\det(BA - z\mathbb{1}) = \det\left(A^{-1}(AB - z\mathbb{1})A\right)$$
$$= \det(AB - z\mathbb{1}) \qquad (*)$$

- Wenn A nicht invertierbar ist, können wir A stetig abändern:
$$A_\varepsilon := A - \varepsilon\mathbb{1}$$

Wähle ε_0 so klein, dass A_ε für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ invertierbar ist.

Dann gilt nach $(*)$: $\quad p_{A_\varepsilon B}(z) = p_{BA_\varepsilon}(z)$

Da das charakteristische Polynom stetig von ε abhängt gilt:

$$\begin{array}{ccc} p_{A_\varepsilon B}(z) & = & p_{BA_\varepsilon}(z) \\ \Big\downarrow \scriptstyle{\varepsilon \to 0^+} & & \Big\downarrow \scriptstyle{\varepsilon \to 0^+} \\ p_{AB}(z) & = & p_{BA}(z) \end{array}$$

2. Fall: $N < M$: Ergänze A und B mit Nullzeilen bzw. Nullspalten zu quadratischen Matrizen:

$$B_0 := \begin{pmatrix} B \\ 0_{M-N,M} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(M \times M)$$

mit $0_{M-N,M} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{}$

$M-N$ Zeilen, M Spalten

$$A_0 := \begin{pmatrix} A & 0_{M,M-N} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(M \times M)$$

Dann gilt: $B_0 A_0 = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(M \times M)$

$$A_0 B_0 = AB \in \mathrm{Mat}(M \times M)$$

Nach Aufgabe 1.7 (a) gilt:

$$\det(B_0 A_0 - z\mathbb{1}_M) = \det(BA - z\mathbb{1}_N)\,\det(-z\mathbb{1}_{M-N})$$

$\parallel$ Fall 1

$$= \underline{\det(BA - z\mathbb{1}_N)(-z)^{M-N}}$$

$$\det(A_0 B_0 - z\mathbb{1}_M)$$

$\parallel$

$$\underline{\det(AB - z\mathbb{1}_M)}$$

$$\Rightarrow \quad P_{AB}(z) = P_{BA}(z)\,(-z)^{M-N}$$

$\square$

(Fall $M < N$ analog bzw. Rollentausch $A \leftrightarrow B$)