Aufgabe 2.1

(a) A ist invertierbar und $\lambda = 0$ ist somit kein Eigenwert.

Für einen Eigenwert λ gilt dann:

$$Av = \lambda v \overset{A^{-1}\cdot}{\Longrightarrow} A^{-1}(Av) = A^{-1}(\lambda v)$$

$$\Rightarrow v = \lambda A^{-1} v$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda^{-1} v = A^{-1} v}$$

(b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum EW $\lambda = 1$. (Bitte selbst nachrechnen!)

(c) Nach A1.7(a) gilt:

$$p_A(z) = \det(A - z\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} B - z\mathbb{1} & C \\ 0 & D - z\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$= \det(B - z\mathbb{1}) \cdot \det(D - z\mathbb{1})$$

$$= p_B(z) \cdot p_D(z)$$

Nullstellen von p_A sind genau Nullstellen von p_B und p_D zusammen genommen. Also: $\sigma(A) = \sigma(B) \cup \sigma(D)$ (Spektrum)

(d) $Av = \lambda v \Rightarrow A^2 v = AAv = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda \cdot \lambda v = \lambda^2 v$

Mit Induktion: <u>IA:</u> s. oben

<u>IV:</u> Es gelte $A^m v = \lambda^m v$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 1$.

<u>IS:</u> $m \to m+1$

$$A^{m+1} v = A(A^m v) \overset{(IV)}{=} A(\lambda^m v)$$

$$= \lambda^m Av = \lambda^{m+1} v \checkmark$$

(e) Es sei λ EW von A, d.h. es gibt ein $v \neq 0$ mit

$$Av = \lambda v$$

Mit Teil (d) folgt auch $A^m v = \lambda^m v$.

Nach Voraussetzung gilt nun $0 = A^m v = \lambda^m v$

Daraus folgt: $\lambda^m = 0$ bzw. $\lambda = 0$. Also 0 einziger EW.

(f) Es sei λ EW von A mit einem Eigenvektor $v \neq 0$.

Dann gilt nach Voraussetzung:

$$(\lambda - \lambda^2) v = Av - A^2 v = 0$$

Also muss $\lambda^2 = \lambda$ gelten, was nur für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ erfüllt ist.