Lösung:

(a) Da T linear ist gilt:

$$\|T\| = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \left\|T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right)\right\|_W =: (*)$$

Nun haben wir:

$$(*) \leq \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \sup_{\substack{u\in V\\ \|u\|_V=1}} \|Tu\|_W = \sup_{\substack{u\in V\\ \|u\|_V=1}} \|Tu\|_W$$

$$(*) \geq \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \left\|T\left(\frac{v}{\|v\|_V}\right)\right\| = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|Tv\|_W$$

Also gilt: $\|T\| = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|Tv\|$ ✓

Nun können wir ebenso nachrechnen:

$$\|T\| = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|Tv\| \leq \sup_{\substack{v\in V\\ 0<\|v\|_V\leq 1}} \|Tv\| = \sup_{\substack{v\in V\\ 0<\|v\|_V\leq 1}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} \leq \sup_{\substack{v\in V\\ v\neq 0}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \|T\|$$

Also gilt auch:

$$\|T\| = \sup_{\substack{v\in V\\ 0<\|v\|_V\leq 1}} \|Tv\| \overset{\text{(Klar)}}{=} \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|\leq 1}} \|Tv\| \qquad \square$$

(b) Beh: $\|Tv\|_W \leq \|T\| \cdot \|v\|_V$

Bew: Für $v = 0$ gilt die Ungleichung, denn es ist $0 \leq \|T\| \cdot 0$.

Für $v \neq 0$ gilt aber:

$$\frac{1}{\|v\|_V} \cdot \|Tv\|_W = \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \leq \sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|_W}{\|u\|_V} = \|T\|$$

$$\Rightarrow \|Tv\|_W \leq \|T\| \cdot \|v\|_V \qquad \square$$

(c) Beh: $\rho : \mathcal{L}(V) \to [0, \infty)$ ist keine Norm

Bew: ρ ist nicht positiv definit, denn $\rho\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, obwohl $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht die Nullmatrix ist.

(d) Beh: $\rho(T) \overset{(1)}{\leq} \|T\| \overset{(2)}{\leq} \sqrt{\rho(T^*T)} < \infty$

Bew: Zu (1): Es sei $|\lambda_{max}| = \rho(T)$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ (Also λ_{max} der betragsmäßig größte Eigenwert)

Dann gibt es einen Eigenvektor $v_{max} \neq 0$ mit $Tv_{max} = \lambda_{max} v_{max}$

Nach (b) gilt $\|Tv_{max}\|_V \leq \|T\| \cdot \|v_{max}\|$

$$\Rightarrow |\lambda_{max}| \cdot \|v_{max}\|_V \leq \|T\| \cdot \|v_{max}\|$$

$$\Rightarrow \rho(T) = |\lambda_{max}| \leq \|T\| \quad \checkmark$$

Zu (2): Da T^*T selbstadjungiert ist, existiert eine ONB (e_i) aus Eigenvektoren zu EW (λ_i).

Jedes $v \in V$ kann dargestellt werden als $v = \sum v_i e_i$.
Dann bedeutet $\|v\| = 1$: $\sum |v_i|^2 = 1$. $\quad (v_i \in \mathbb{K})$

Wir berechnen nun:

$$\|T\| = \sup_{\|v\|=1} \|Tv\| = \sup_{\|v\|=1} \sqrt{\langle Tv, Tv \rangle} = \sup_{\|v\|=1} \sqrt{\langle v, T^*Tv \rangle}$$

$$= \sup_{\substack{\sum |v_i|^2 = 1 \\ v_i \in \mathbb{K}}} \left[\left\langle \sum_{i=1}^{N} v_i e_i \,, \sum_{j=1}^{N} v_j \underbrace{T^*T e_j}_{\lambda_j e_j} \right\rangle \right]^{1/2}$$

$$= \sup_{\text{"}} \left[\sum_i \sum_j \overline{v_i}\, v_j\, \lambda_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} \right]^{1/2}$$

$$= \sup_{\text{"}} \left[\sum_{i=1}^{N} |v_i|^2 \cdot \lambda_i \right]^{1/2} \qquad \text{wobei } \lambda_i \le \lambda_{max} = \rho(T^*T)$$

$$\le \sqrt{\rho(T^*T)} \cdot \sup_{\sum |v_i|^2 = 1} \left[\sum |v_i|^2 \right]^{1/2} = \underline{\sqrt{\rho(T^*T)}} \qquad \square$$

(e) Beh: T normal $\Rightarrow \rho(T) = \|T\|$

Bew: Wenn T normal ist, existiert eine unitäre Abbildung U, die T zu einer Diagonalmatrix macht:

$$U^* T U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix}$$, λ_i EW von T

Daraus folgt: $$U^* T^* U = D^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_N} \end{pmatrix}$$

(komplex konj. Eigenwerte!

Dies bedeutet aber:

$$T^*T = U D^* U^* U D U^* = U D^* D U^* = U \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_N|^2 \end{pmatrix} U^*$$

Demnach sind $|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_N|^2$ die Eigenwerte von T^*T.

D.h

$$\underbrace{\max\{|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_N|^2\}}_{\rho(T)^2} = \rho(T^*T)$$

Also gilt $\rho(T) = \sqrt{\rho(T^*T)}$

$$\overset{(d)}{\Rightarrow} \rho(T) = \|T\|$$ $\square$