Lösung:

(a) $$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$ Blockmatrix mit $B \in Mat(k \times k, \mathbb{K})$, $D \in Mat(n \times n, \mathbb{K})$

Es gilt dann $k + n = N$.

Für die Determinante gilt:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_N} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{N} A_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in M} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{N} A_{i,\sigma(i)}$$

Für jede Menge M mit

$$S_N \supseteq M \supseteq \{\sigma \in S_N \mid \prod_{i=1}^{N} A_{i,\sigma(i)} \neq 0\}$$

Aufgrund des Nullblocks unten links können wir feststellen, dass $A_{ij} = 0$ für $j \leq k < i$.

Das heißt aber auch $\prod_{i=1}^{N} A_{i,\sigma(i)} = 0$ sobald $\sigma(i) \leq k$ für ein $i \in \{k+1, \dots, N\}$

Setze $I_1 := \{1, \dots, k\}$ und $I_2 := \{k+1, \dots, N\}$.

Wir wählen die Menge M von oben.

$$M := \{\sigma \in S_N \mid \sigma(i) \in I_2 \text{ für } i \in I_2\}$$

Anschaulich:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \cdots & k & \big| & k+1 & \cdots & N \\ \underbrace{\cdots\cdots}_{\substack{\text{Nur Zahlen} \\ \text{aus } I_1 = \{1,\dots,k\}}} & & \big| & & \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\text{Nur Zahlen aus } I_2 = \{k+1,\dots,N\}} & \end{pmatrix}$$

Permutation getrennt.

Die Permutation zerfällt also in zwei unabhängige Permutationen. (Wohlgemerkt liegt dies am Nullblock unten links.)

Wir haben also offensichtlich folgende Bijektionen:

$$M \overset{\text{Bijektion}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\{\text{Permutationen von } I_1\}}_{\ni \omega} \times \underbrace{\{\text{Permutationen von } I_2\}}_{\ni \pi}$$

$$\overset{\text{Bijektion}}{\longleftrightarrow} S_k \times S_n$$

Dann erhalten wir für die Determinante:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in M} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{N} A_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in M} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{k} A_{i,\sigma(i)} \prod_{i=k+1}^{N} A_{i,\sigma(i)}$$

$$= \sum_{\substack{\omega \text{ Perm. v. } I_1 \\ \pi \text{ Perm. v. } I_2}} sgn(\omega)\, sgn(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{k} A_{i,\omega(i)} \prod_{i=k+1}^{N} A_{i,\pi(i)}$$

[Beachte, dass $sgn(\sigma) = sgn(\omega) \cdot sgn(\pi)$]

$$= \sum_{\substack{\omega\in S_k \\ \tau\in S_n}} sgn(\omega) \prod_{i=1}^{k} B_{i,\omega(i)} \cdot sgn(\tau) \prod_{i=1}^{n} D_{i,\tau(i)}$$

$$= \left(\sum_{\omega\in S_k} sgn(\omega) \prod_{i=1}^{k} B_{i,\omega(i)}\right) \left(\sum_{\tau\in S_n} sgn(\tau) \prod_{i=1}^{n} D_{i,\tau(i)}\right)$$

$$= \underline{\det(B)\cdot\det(D)}$$ $\square$

(b)

Zu zeigen: $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ für passend gewählte Matrizen.

Wähle $A = B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix} = 4$$

$$\det(A) = \det(B) = 1$$

$$\det(A+B) = 4 \neq 2 = \det(A) + \det(B).$$