Lösung:

$\varphi : \mathbb{K}^N \times \dots \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ ist N-linear (1)

und alternierend (2)

(a) Beh: $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + a x_j, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_N)$

$= \varphi(x_1, \dots, x_N)$ für $i \neq j$, $a \in \mathbb{K}$.

Bew: Dies können wir leicht nachrechnen:

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + a x_j, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_N)$$

$$\overset{(1)}{=} \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$$

$$+ a \underbrace{\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_N)}_{= 0 \text{ nach } (2)}$$

$$= \varphi(x_1, \dots, x_N) \qquad \square$$

(b) Beh: $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \varphi(x_1, \dots, x_N)$

für $\sigma \in S_N$.

Bew: Mit vollständiger Induktion, denn jede Permutation kann als Komposition von (benachbarten) Transpositionen geschrieben werden.

Es sei nun $\sigma \in S_N$ darstellbar als Verkettung von

k Transpositionen: $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$.

Induktion über k:

<u>IA:</u> $k=1$, d.h. $sgn(\sigma) = -1$, und $\sigma(i) = i$ für alle $i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j,k\}$, $j \neq k$

und $\sigma(j) = k$, $\sigma(k) = j$.

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_k, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_j, x_{k+1}, \dots, x_N)$$

$$\stackrel{(2)}{=} -\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)$$

$$= sgn(\sigma)\, \varphi(x_1, \dots, x_N) \quad \checkmark$$

<u>IV:</u> Für $\sigma \in S_N$ dargestellt mit k Transpositionen gilt

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = sgn(\sigma)\, \varphi(x_1, \dots, x_N)$$

<u>IS:</u> $k \to k+1$. Schreibe $\sigma = \tau_{k+1} \circ \tilde{\sigma}$ während $\tilde{\sigma}$ aus k Transpositionen dargestellt ist.

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) = \varphi(x_{\tau_{k+1} \circ \tilde{\sigma}(1)}, \dots, x_{\tau_{k+1} \circ \tilde{\sigma}(N)})$$

$$= sgn(\tau_{k+1})\, \varphi(x_{\tilde{\sigma}(1)}, \dots, x_{\tilde{\sigma}(N)}) \qquad (\text{Fall } k=1, \text{IA})$$

$$\stackrel{(IV)}{=} sgn(\tau_{k+1})\, sgn(\tilde{\sigma})\, \varphi(x_1, \dots, x_N)$$

$= \mathrm{sgn}(\tau_{k,k+1} \circ \tilde{\sigma}) \cdot \varphi(x_1, \dots, x_N)$

$= \underline{\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \varphi(x_1, \dots, x_N)}$ $\square$

(c) Die Matrix $B := B(x)$ ist so definiert, dass sie x_j als j-ten Spaltenvektor besitzt. Dies bedeutet demnach:

$$Be_j = x_j$$

Beziehungsweise für die Einträge $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & & B_{1N} \\ B_{N1} & & \ddots & B_{NN} \end{pmatrix}$:

$$\sum_{i=1}^{N} B_{ij} e_i = x_j .$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{N} B_{i_1,1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_N=1}^{N} B_{i_N,N} e_{i_N}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{i_1,\dots,i_N=1}^{N} B_{i_1,1} \cdots B_{i_N,N} \underbrace{\varphi(e_{i_1}, \dots, e_{i_N})}_{=0 \text{ für } i_1 = i_2 \text{ z.B.}}$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{\sigma \in S_N} B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(N),N} \, \varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(N)})$$

$$\overset{(2)}{=} \det(B^T) \, \varphi(e_1, \dots, e_N)$$

$$= \underline{\det(B) \, \varphi(e_1, \dots, e_N)}$$