Prof. Dr. Schulz-Baldes Julian Großmann

13. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Präsenzaufgabe 13.1 (Untermannigfaltigkeiten)

(a) Betrachten Sie die Einheitsheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und einen Stab der Länge $L \in (0,2]$, mit Endpunkten a, b auf S^2. Zeigen Sie, dass die Menge dieser Endpunkte

$$\mathcal{M}_L := \{(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^6 \mid (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \text{ zwei Endpunkte des Stabes}\}$$

eine differenzierbare C^1-Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^6$ ist. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathcal{M}_L$.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwei Fälle für L.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1, bezeichnet mit

$$\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\},$$

eine (n^2-1)-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit in $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ ist.

Hinweis: Sie können $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren.

Präsenzaufgabe 13.2 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 + 4x^2 + 4y^2$ und bestimmen Sie allen lokalen Extrema auf der Kreislinie S^1 auf zwei verschiedene Weisen:

(a) Lösen Sie die Nebenbedingung auf und setzen Sie sie ein.

(b) Verwenden Sie Lagrange-Multiplikatoren.

Präsenzaufgabe 13.3 (Lagrange-Multiplikatoren)

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}z^4$ auf der Menge $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^4 \leq 16\}$. Betrachten Sie dazu separat das Innere und den Rand von M.

Dies ist ein reines Präsenzübungsblatt und wird in der Übung besprochen.