10. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Am 15. und 16. Juni sind Hochschulwahlen im Physikum vor dem Hörsaal HF.
Semesterticket, Zivilklausel, Anwesenheitspflicht und Prüfungsordnungen. Studierende entscheiden mit – auch du? Am 15. und 16. Juni sind Hochschulwahlen.

Präsenzaufgabe 10.1 (Totale Differenzierbarkeit)

Betrachten Sie die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^4}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ Frechét-differenzierbar ist.

Hinweis: Sie können die Ungleichung $2|ab| \leq a^2 + b^2$ für reelle Zahlen a, b benutzen.

Bemerkung: In endlichdimensionalen Vektorräumen nennt man Frechét-Differenzierbarkeit meistens totale Differenzierbarkeit.

Präsenzaufgabe 10.2 (Produktregel)

Betrachten Sie die Funktionen $f : (0, 2\pi) \to \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $g : (0, 2\pi) \to \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$:

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\,, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ e^{-t} & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ für jeden Punkt $t_0 \in (0, 2\pi)$ und schreiben diese explizit als lineare Abbildungen auf. Verwenden Sie nun die (mehrdimensionale) Produktregel, um die Ableitung $(f \cdot g)'(t_0)$ zu berechnen.

Präsenzaufgabe 10.3 (Partielle Ableitungen)

Betrachten Sie die folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0\,,\ y \in \mathbb{R} \\ 0\,, & x = 0\,,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist. Sind diese partielle Ableitungen stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$? Ist f in $(0,0)$ total differenzierbar?

Präsenzaufgabe 10.4 (Jacobi-Matrizen)

Es seien die Funktionen $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \ln(x) + y \\ yz \end{pmatrix}\,, \quad g(s,t) = \begin{pmatrix} s^2 + t^2 \\ te^s \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von f, g und $g \circ f$. Sind f, g, und $g \circ f$ auf ihrem ganzen Definitionsbereich total differenzierbar?

Hausaufgabe 10.5 (Gleichmäßige Konvergenz) (4+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie den *Weierstraß'schen M-Test*: Es seien für alle natürliche Zahlen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{K}$ gegeben. Gibt es nun positive Zahlen M_n mit

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in D} |f_n(x)| \leq M_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty\,,$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $F : D \to \mathbb{K}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$$

wohldefiniert und stetig ist. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

Hausaufgabe 10.6 (Operatornorm und Spektralradius) (5 Punkte)

Betrachte Sie zwei normierte Räume $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$. Es bezeichne $\mathcal{L}(V,W)$ den Raum der linearen Abbildungen von V nach W. Wir definieren für $T \in \mathcal{L}(V,W)$ die *Operatornorm*:

$$\|T\| := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V} \in [0, \infty]\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $T \in \mathcal{L}(V,W)$ gilt:

$$\|T\| = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|Tv\|_W = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| \leq 1}} \|Tv\|_W\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $T \in \mathcal{L}(V,W)$ und $v \in V$ gilt:

$$\|Tv\|_W \leq \|T\| \cdot \|v\|_V\,.$$

Betrachten Sie nun den endlichdimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{K}^N$ zusammen mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ und der induzierten euklidischen Norm. Für eine lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V,V)$ definieren wir den *Spektralradius*:

$$\rho(T) := \max\{|\lambda| \in [0,\infty) \mid \lambda \text{ Eigenwert von } T\}\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass $\rho : \mathcal{L}(V) \to [0,\infty)$ keine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}(V)$ definiert.

(d) Zeigen Sie, dass die Operatornorm $\|\cdot\|$ und der Spektralradius die Ungleichungen

$$\rho(T) \leq \|T\| \leq \sqrt{\rho(T^*T)} < \infty$$

für alle $T \in \mathcal{L}(V)$ erfüllen.

(e) **(2 Bonuspunkte)** Zeigen Sie, dass für einen normalen Operator $T \in \mathcal{L}(V)$ gilt:

$$\rho(T) = \|T\|\,.$$

Hausaufgabe 10.7 (Ketten- und Produktregel) (3+4 Punkte)

(a) Betrachten Sie die folgende Abbildungen $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \tan(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(u,v,w) = we^v - \arctan(v)\,.$$

Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $g \circ f$ auf zwei verschiedene Arten, nämlich einmal mit und einmal ohne die (mehrdimensionale) Kettenregel.

(b) Betrachten Sie nun die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & x & 0 \\ x & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}, \quad g(x,y) = \begin{pmatrix} y & y^2 & 0 \\ x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x_0, y_0)$ und $g'(x_0, y_0)$ für einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Verwenden Sie die (mehrdimensionale) Produktregel, um die Ableitung $(f \cdot g)'(x_0, y_0)$ zu berechnen.