9. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Physikstudierende 2

im Sommersemester 2016

Am 15. und 16. Juni sind Hochschulwahlen im Physikum vor dem Hörsaal HF.
Semesterticket, Zivilklausel, Anwesenheitspflicht und Prüfungsordnungen. Studierende entscheiden mit – auch du? Am 15. und 16. Juni sind Hochschulwahlen.

Präsenzaufgabe 9.1 (Fixpunktsatz von Banach)

Betrachten Sie den vollständigen metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ mit

$$d_\infty\left((x_1,x_2)^T,(y_1,y_2)^T\right) := \max_{1\le i\le 2} |x_i - y_i|\,,$$

und die folgende Abbildung:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar ist.

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Schritte des Fixpunktverfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = (8,8)^T$.

(c) Berechnen Sie den Fixpunkt direkt.

Präsenzaufgabe 9.2 (Eigenschaften stetiger Abbildungen)

Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen korrekt sind:

(a) f führt konvergente Folgen in konvergente Folgen über.

(b) f führt Cauchyfolgen in Cauchyfolgen über.

(c) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so ist $f(A)$ abgeschlossen.

(d) Ist $K \subset X$ kompakt, so ist $f(K)$ kompakt.

(e) Ist $A \subset X$ beschränkt, so ist $f(A)$ beschränkt.

(f) Für $A \subset X$ gilt $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Präsenzaufgabe 9.3 (Folgen in metrischen Räumen)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge in A wieder in A liegt.

(b) Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, die einen Häufungspunkt $x \in X$ besitzt, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar konvergent mit Grenzwert x.

(c) Für eine Teilmenge $A \subset X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A liegt dicht in X, d. h. $\overline{A} = X$.

(ii) Jede offene Kugel in X enthält einen Punkt aus A.

(iii) Jedes $x \in X$ ist Grenzwert einer Folge aus A.

(d) Für den Abschluss einer Teilmenge $A \subset X$ gilt:

$$\overline{A} = \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ mit } a_n \xrightarrow{n\to\infty} x \right\}.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ gilt und folgern Sie dann, dass $\overline{A}$ die kleinste *abgeschlossene* Menge ist, die A enthält.

Hausaufgabe 9.4 (Fixpunktsatz von Banach) (8 Punkte)

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion, d. h. es gibt ein $L < 1$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz gibt es genau einen Fixpunkt $a \in X$, d. h. $f(a) = a$.

(a) Zeigen Sie die sogenannte *A-priori-Abschätzung*

$$d(a, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0)\,,$$

wobei $x_0 \in X$ beliebig und $x_n := f(x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv definiert ist.

Stellen Sie sich nun vor, Sie sitzen in einer langweiligen Vorlesung und haben nur Ihren Taschenrechner dabei. Dieser ist natürlich wie immer auf das Bogenmaß eingestellt. Wenn Sie nun wie wild auf die Kosinustaste klopfen, so wird sich schließlich immer derselbe Wert einstellen, welcher ungefähr 0.739085 lautet. Wir werden nun untersuchen, warum dies geschieht.

(b) Zeigen Sie zuerst, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \cos(\cos(x))$ in das Intervall $X := [\frac{1}{2}, 1]$ abbildet.

(c) Betrachten Sie nun die Funktion $f : X \to X$ mit $f(x) = \cos(x)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung eine Kontraktion (auf X) ist und wählen Sie für das weitere Vorgehen eine passende Lipschitz-Konstante $L < 1$.

(d) Warum ist der Banach'sche Fixpunktsatz anwendbar? Warum können wir das Fixpunktverfahren auch mit einem Startwert außerhalb von X beginnen?

(e) Berechnen Sie mit Hilfe der A-priori-Abschätzung, wie oft Sie die Kosinustaste für irgendeinen Startwert $x \in \mathbb{R}$ drücken müssen, um den Fixpunkt mit einer Genauigkeit von 5 Nachkommastellen darzustellen.

Hausaufgabe 9.5 (Kompaktheit) (4 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $A \subset X$ folgenkompakt, so auch vollständig.

(b) Ist $A \subset X$ folgenkompakt, so auch abgeschlossen und beschränkt.

Hausaufgabe 9.6 (Vollständiger Folgenraum) (8 Punkte)

Wir betrachten den unendlichdimensionalen Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{C}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

ausgestattet mit der Norm $\|x\|_{\ell^2} := \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2}$.

(a) Geben Sie die von dieser Norm induzierte Metrik an.

(b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Einheitskugel

$$K_1(0) := \{x \in X \mid \|x\|_{\ell^2} \leq 1\}$$

beschränkt und abgeschlossen ist, jedoch nicht kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^2})$ ein Banachraum ist.

Zusatzaufgabe 9.7 (Vollständigkeit) (5 Bonuspunkte)

Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^1([0,1])$ den $\mathbb{K}$-Vektorraum der auf $[0,1]$ stetig differenzierbaren $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen. Wir definieren wie üblich für eine stetige Funktion g die Supremumsnorm

$$\|g\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|\,.$$

Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ setzen wir:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\,.$$

Zeigen Sie nun:

(a) $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ ist ein Banachraum.

(b) $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist kein Banachraum.